МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Тольяттинский государственный университет»

Тольяттинский государственный университет
(наименование института полностью)

(Наименование учебного структурного подразделения)

(код и наименование направления подготовки / специальности)

(направленность (профиль) / специализация)

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАДАНИЕ №1-6

по учебному курсу «Высшая математика 3»
(наименование учебного курса)

Вариант 9/5/1 *(при наличии)*

Обучающегося ______________________
(И.О. Фамилия)

Группа ______________________

Преподаватель ______________________
(И.О. Фамилия)

Тольятти 2025

Бланк выполнения задания 1

Задача 1 (формулировка полностью):

Даны дифференциальные уравнения первого порядка с разделяющимися переменными и их начальные условия. Найти общие решения этих уравнений и определить частные решения.

а) $y' - (y+1)\sin x = 0$, $x = 0,\ y = 0$;

б) $y' x \cos y - 1 = 0$, $y(1) = 0$.

Решение:

а) $y' - (y+1)\sin x = 0$, $x = 0,\ y = 0$.

<u>Общее решение.</u>

Задано дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными: $y' - (y+1)\sin x = 0$.

Разделим переменные:

$y' = (y+1)\sin x$;

$\dfrac{dy}{dx} = (y+1)\sin x$;

$\dfrac{dy}{y+1} = \sin x\, dx$.

Проинтегрируем почленно:

$\int \dfrac{dy}{y+1} = \int \sin x\, dx$;

$\ln|y+1| = -\cos x + \ln|C|$;

$\ln|y+1| = \ln\left|e^{-\cos x}\right| + \ln|C|$;

$\ln|y+1| = \ln\left|C e^{-\cos x}\right|$;

$y + 1 = C e^{-\cos x}$;

$y = C e^{-\cos x} - 1$ – общее решение дифференциального уравнения.

<u>Частное решение.</u>

Частное решение найдём, подставив в общее решение начальные условия $x = 0$, $y = 0$:

$0 = C \cdot e^{-\cos 0} - 1$;

$1 = C \cdot e^{-1}$;

$C = e$.

Таким образом, частное решение дифференциального уравнения:

$y = e \cdot e^{-\cos x} - 1$,

или:

$y = e^{1 - \cos x} - 1$.

Ответ:

$y = C e^{-\cos x} - 1$ – общее решение дифференциального уравнения;

$y = e^{1 - \cos x} - 1$ – частное решение дифференциального уравнения.

б) $y' x \cos y - 1 = 0$, $y(1) = 0$.

Общее решение.

Задано дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными:

$y' x \cos y - 1 = 0$.

Разделим переменные:

$y' x \cos y = 1$;

$\frac{dy}{dx} x \cos y = 1$;

$\cos y \, dy = \frac{dx}{x}$.

Проинтегрируем левую и правую части уравнения:

$\int \cos y \, dy = \int \frac{dx}{x}$;

$\sin y = \ln|x| + \ln|C|$;

$\sin y = \ln|Cx|$;

$y = \arcsin \ln|Cx|$ – общее решение дифференциального уравнения.

Частное решение.

Частное решение найдём, подставив в общее решение начальные условия $y(1)=0$:

$0=\arcsin\ln|C\cdot 1|$;

$0=\ln|C|$;

$C=1$.

Таким образом, частное решение дифференциального уравнения:

$y=\arcsin\ln|x|$.

Ответ:

$y=\arcsin\ln|Cx|$ – общее решение дифференциального уравнения;

$y=\arcsin\ln|x|$ – частное решение дифференциального уравнения.

Задача 2 (формулировка полностью):

Решить дифференциальное уравнение первого порядка:

$x^2 y' - y^2 + 2y + 24 = 0$.

Решение:

Преобразуем заданное уравнение:

$x^2 y' - y^2 + 2y + 24 = 0$;

$x^2 y' = y^2 - 2y - 24$.

Это дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными.

Разделим переменные:

$$x^2 \frac{dy}{dx} = y^2 - 2y - 24;$$

$$\frac{dy}{y^2 - 2y - 24} = \frac{dx}{x^2}.$$

Проинтегрируем почленно:

$$\int \frac{dy}{y^2 - 2y - 24} = \int \frac{dx}{x^2};$$

$$\int \frac{dy}{\left(y^2 - 2y + 1\right) - 25} = \int x^{-2}\, dx;$$

$$\int \frac{d\left(y-1\right)}{\left(y-1\right)^2 - 5^2} = \int x^{-2}\, dx;$$

$$\frac{1}{2 \cdot 5} \ln\left|\frac{\left(y-1\right) - 5}{\left(y-1\right) + 5}\right| = \frac{x^{-1}}{-1} + \frac{C}{10};$$

$$\ln\left|\frac{y-6}{y+4}\right| = -\frac{10}{x} + C;$$

$\dfrac{10}{x} + \ln\left|\dfrac{y-6}{y+4}\right| = C$ – общий интеграл дифференциального уравнения.

Ответ: $\dfrac{10}{x} + \ln\left|\dfrac{y-6}{y+4}\right| = C$.

Бланк выполнения задания 2

Задача 1 (формулировка полностью):

Дано дифференциальное уравнение первого порядка и его начальные условия. Найти общее решение этого уравнения и определить частное решение.

$y' - y\,tg\,x = \dfrac{1}{\cos x}$, $y_0 = 5,\ x_0 = 1$.

Решение:

Общее решение.

Задано линейное неоднородное дифференциальное уравнение первого порядка:

$$y' - y\ \mathrm{tg}\,x = \frac{1}{\cos x}.$$

Положим: $y = u(x)\cdot v(x)$. Тогда:

$$y' = u'v + uv'.$$

Подставим в уравнение:

$$u'v + uv' - uv\cdot \mathrm{tg}\,x = \frac{1}{\cos x};$$

$$u'v + u\cdot\left(v' - v\ \mathrm{tg}\,x\right) = \frac{1}{\cos x}.$$

Сначала найдём частное решение $v(x)$ из уравнения $v' - v\ \mathrm{tg}\,x = 0$:

$$v' = v\ \mathrm{tg}\,x;$$

$$\frac{dv}{dx} = v\ \mathrm{tg}\,x;$$

$$\frac{dv}{v} = \mathrm{tg}\,x\,dx;$$

$$\int\frac{dv}{v} = \int \mathrm{tg}\,x\,dx;$$

$$\ln|v| = -\ln|\cos x|;$$

$$\ln|v| = \ln\left|\frac{1}{\cos x}\right|;$$

$v = \dfrac{1}{\cos x}$.

Теперь найдём общее решение $u(x)$, учитывая найденное ранее решение $v(x)$:

$u' \cdot \dfrac{1}{\cos x} + u \cdot 0 = \dfrac{1}{\cos x}$;

$u' = 1$;

$\int u'\,dx = \int dx$;

$u = x + C$.

Запишем общее решение исходного уравнения $y = u \cdot v$:

$y = (x + C) \cdot \dfrac{1}{\cos x}$;

$y = \dfrac{x + C}{\cos x}$.

Частное решение.

Найдём частное решение дифференциального уравнения, подставляя начальные условия $y_0 = 5,\ x_0 = 1$ в общее решение:

$5 = \dfrac{1 + C}{\cos 1} \quad \Rightarrow \quad 5 \cdot \cos 1 = 1 + C \quad \Rightarrow \quad C = 5 \cdot \cos 1 - 1$;

$y = \dfrac{x + 5 \cdot \cos 1 - 1}{\cos x}$ – частное решение дифференциального уравнения.

Ответ:

$y = \dfrac{x + C}{\cos x}$ – общее решение дифференциального уравнения;

$y = \dfrac{x + 5 \cdot \cos 1 - 1}{\cos x}$ – частное решение дифференциального уравнения.

Задача 2 (формулировка полностью):

Решить дифференциальное уравнение первого порядка:
$\left(y^3-3x\right)y'=y$.

Решение:

Преобразуем уравнение, учитывая, что $y'_x=\dfrac{1}{x'_y}$:

$$\left(y^3-3x\right)y'=y;$$

$$\left(y^3-3x\right)\cdot\frac{1}{x'}=y;$$

$$y^2-\frac{3x}{y}=x';$$

$$x'+\frac{3x}{y}=y^2.$$

Это линейное неоднородное дифференциальное уравнение первого порядка относительно x.

Положим: $x(y)=u(y)\cdot v(y)$. Тогда:
$x'=u'v+uv'$.

Подставим в уравнение:

$$u'v+uv'+\frac{3\cdot uv}{y}=y^2;$$

$$u'v+u\cdot\left(v'+\frac{3v}{y}\right)=y^2.$$

Найдём частное решение $v(y)$ из уравнения $v'+\dfrac{3v}{y}=0$:

$$v'=-\frac{3v}{y};$$

$$\frac{dv}{dy}=-\frac{3v}{y};$$

$$\frac{dv}{v}=-3\cdot\frac{dy}{y};$$

$$\int\frac{dv}{v}=-3\int\frac{dy}{y};$$

$$\ln|v| = -3\ln|y|;$$

$$\ln|v| = \ln\left|\frac{1}{y^3}\right|;$$

$$v = \frac{1}{y^3}.$$

Найдём общее решение $u(y)$, учитывая найденное ранее решение $v(y)$:

$$u' \cdot \frac{1}{y^3} + u \cdot 0 = y^2;$$

$$u' = y^5;$$

$$\int u'\,dx = \int y^5\,dy;$$

$$u = \frac{y^6}{6} + C.$$

Запишем общее решение исходного уравнения:

$$x = u \cdot v \quad \Rightarrow \quad x = \left(\frac{y^6}{6} + C\right) \cdot \frac{1}{y^3};$$

$$x = \frac{y^3}{6} + \frac{C}{y^3}.$$

Ответ: $x = \dfrac{y^3}{6} + \dfrac{C}{y^3}$.

Бланк выполнения задания 3

Задача (формулировка полностью):

Даны дифференциальные уравнения второго порядка. Найти общее решение этих уравнений.

1. $y''+8y'+20y=0$;
2. $y''-2y'tg\,x=0$;
3. $11y''+12y'=0$.

Решение:

1. $y''+8y'+20y=0$.

Это линейное однородное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами.

Составим характеристическое уравнение и найдём его корни:

$k^2+8k+20=0$;

$k_{1,2}=-4\pm\sqrt{4^2-20}=-4\pm\sqrt{-4}=-4\pm\sqrt{4}\cdot\sqrt{-1}=-4\pm 2\cdot i$.

Запишем общее решение уравнения, учитывая, что корни характеристического уравнения комплексные ($\alpha=-4,\ \beta=2$):

$y=e^{\alpha x}\left(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x\right) \quad\Rightarrow\quad y=e^{-4x}\left(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x\right)$.

Ответ: $y=e^{-4x}\left(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x\right)$.

2. $y''-2y'tg\,x=0$.

Это дифференциальное уравнение второго порядка, не содержащее в явном виде переменной y. Его порядок можно понизить с помощью замены $y'=z(x)$. Тогда:

$y''=z'$.

Уравнение примет вид:

$z'-2z\cdot\operatorname{tg}x=0$.

Разделяя переменные и интегрируя, получим:

$z'=2z\cdot\operatorname{tg}x$;

$$\frac{dz}{dx} = 2z \cdot \frac{\sin x}{\cos x};$$

$$\frac{dz}{z} = -2 \cdot \frac{-\sin x \, dx}{\cos x};$$

$$\int \frac{dz}{z} = -2 \int \frac{-\sin x \, dx}{\cos x};$$

$$\int \frac{dz}{z} = -2 \int \frac{d(\cos x)}{\cos x};$$

$$\ln|z| = -2 \cdot \ln|\cos x| + \ln|C_1|;$$

$$\ln|z| = \ln\left|\frac{C_1}{\cos^2 x}\right|;$$

$$z = \frac{C_1}{\cos^2 x}.$$

Делая обратную замену, получаем уравнение первого порядка:

$$y' = \frac{C_1}{\cos^2 x}.$$

Разделяя переменные и интегрируя, получим общее решение первоначального уравнения:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{C_1}{\cos^2 x};$$

$$dy = C_1 \frac{dx}{\cos^2 x};$$

$$\int dy = C_1 \int \frac{dx}{\cos^2 x};$$

$y = C_1 \cdot \mathrm{tg}\, x + C_2$ – общее решение дифференциального уравнения.

Ответ: $y = C_1 \cdot \mathrm{tg}\, x + C_2$.

3. $11y'' + 12y' = 0$.

Это линейное однородное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами.

Составим характеристическое уравнение и найдём его корни:

$$11k^2 + 12k = 0;$$

$11k^2 + 12k = 0$;

$11k\left(k + \frac{12}{11}\right) = 0$;

$k_1 = -\frac{12}{11}$, $k_2 = 0$.

Запишем общее решение уравнения, учитывая, что корни характеристического уравнения действительные и различные:

$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x} \quad \Rightarrow \quad y = C_1 e^{-\frac{12}{11}x} + C_2$.

Ответ: $y = C_1 e^{-\frac{12}{11}x} + C_2$.

Бланк выполнения задания 4

Задача 1 (формулировка полностью):

Построить область интегрирования, изменить порядок интегрирования в интеграле.

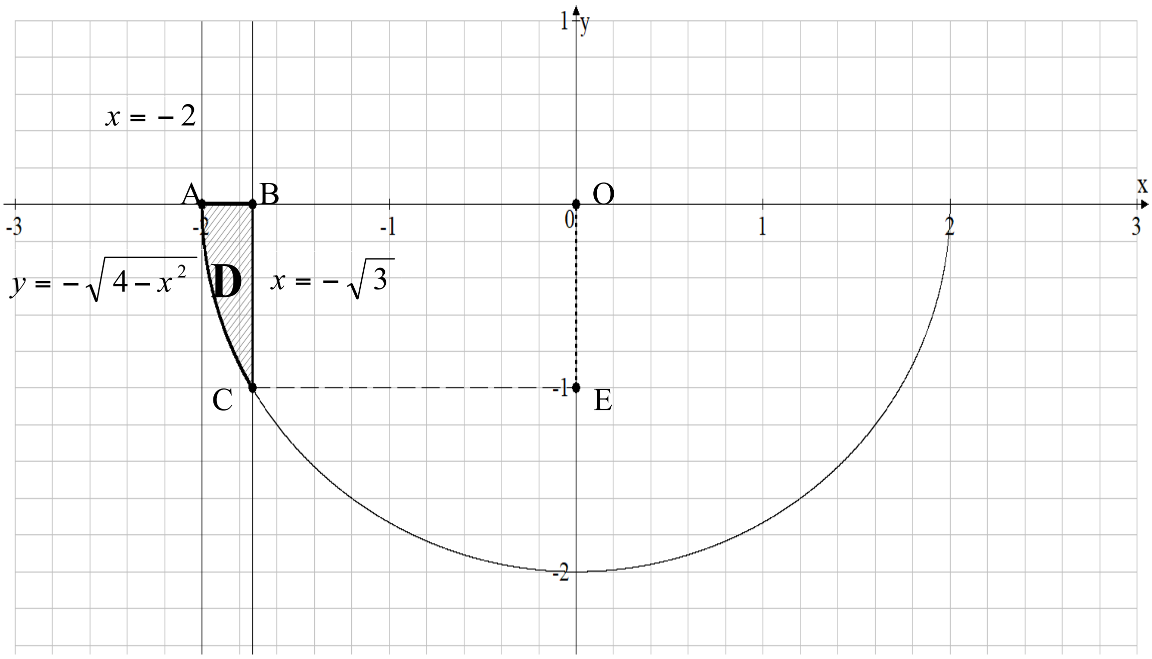
$$\int_{-2}^{-\sqrt{3}} dx \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{0} f(x,y)\,dy.$$

Решение:

Зная пределы интегрирования, найдём границы области интегрирования D:

$x=-2$, $x=-\sqrt{3}$, $y=-\sqrt{4-x^2}$, $y=0$.

Построим схематично область D.



Область интегрирования – криволинейная фигура ABC.

Изменим порядок интегрирования.

Внешнее интегрирование будет по y. Область D проецируется на ось Oy в отрезок OE:

$y_E=-\sqrt{4-\left(-\sqrt{3}\right)^2}=-1$, $y_O=0$.

Таким образом, пределы внешнего интегрирования будут:

$y = -1,\ y = 0$.

Внутреннее интегрирование будет по x. Левой границей области D является полуокружность $y = -\sqrt{4 - x^2}$, а правой – прямая $x = -\sqrt{3}$:

$y = -\sqrt{4 - x^2} \quad \Rightarrow \quad y^2 = 4 - x^2 \quad \Rightarrow \quad x^2 = 4 - y^2 \quad \Rightarrow \quad x = \pm\sqrt{4 - y^2}$;

области D соответствует $x = -\sqrt{4 - y^2}$.

Запишем двойной интеграл с изменённым порядком интегрирования:

$$I = \int_{-1}^{0} dy \int_{-\sqrt{4-y^2}}^{-\sqrt{3}} f(x, y)\, dx.$$

Ответ: $\int_{-1}^{0} dy \int_{-\sqrt{4-y^2}}^{-\sqrt{3}} f(x, y)\, dx$.

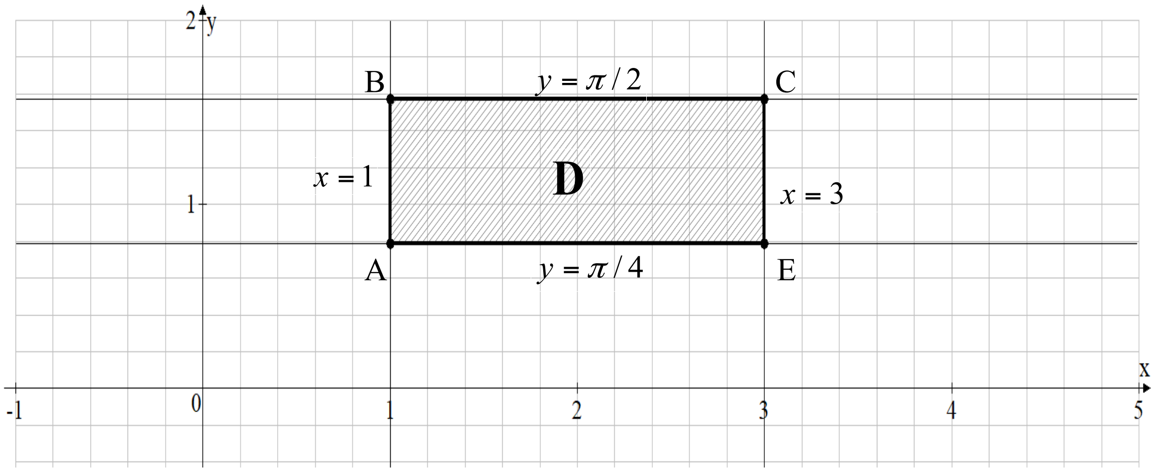
Задача 2 (формулировка полностью):

Вычислить двойные интегралы.

$\iint\limits_D y\cos 2xydxdy$, если $D:\ x=1, x=3, y=\frac{\pi}{4}, y=\frac{\pi}{2}$.

Решение:

Построим схематично линии и выделим замкнутую область D, которую они образуют.



Заданная область D представляет собой прямоугольник, который ограничен прямыми y = п/4, y = п/2, x = 1, x = 3. Это и будут пределы интегрирования при переходе от двойного интеграла к повторному:

$$\iint\limits_D y\cos 2xy\ dx\,dy=\int\limits_{\pi/4}^{\pi/2} y\ dy\int\limits_1^3 \cos 2xy\ dx=\int\limits_{\pi/4}^{\pi/2}\left(\frac{\sin 2xy}{2y}\Bigg|_1^3\right)\cdot y\ dy=$$

$$=\frac{1}{2}\int\limits_{\pi/4}^{\pi/2}\left(\sin 2xy\Bigg|_1^3\right)dy=\frac{1}{2}\int\limits_{\pi/4}^{\pi/2}\left(\sin 6y-\sin 2y\right)dy=\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{\cos 6y}{6}+\frac{\cos 2y}{2}\right)\Bigg|_{\pi/4}^{\pi/2}=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\left[\left(-\frac{\cos 3\pi}{6}+\frac{\cos\pi}{2}\right)-\left(-\frac{\cos\frac{3\pi}{2}}{6}+\frac{\cos\frac{\pi}{2}}{2}\right)\right]=\frac{1}{2}\cdot\left[\left(-\frac{-1}{6}+\frac{-1}{2}\right)-\left(-\frac{0}{6}+\frac{0}{2}\right)\right]=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\left[\left(-\frac{1}{3}\right)-0\right]=-\frac{1}{6}.$$

Ответ: $-\frac{1}{6}$.

Бланк выполнения задания 5

Задача 1 (формулировка полностью):

Преобразовать к полярным координатам и вычислить.

$\iint\limits_D \left(x^2+y^2\right)^2 dxdy$, если D: $x^2+y^2-x=0,\quad y\le x$.

Решение:

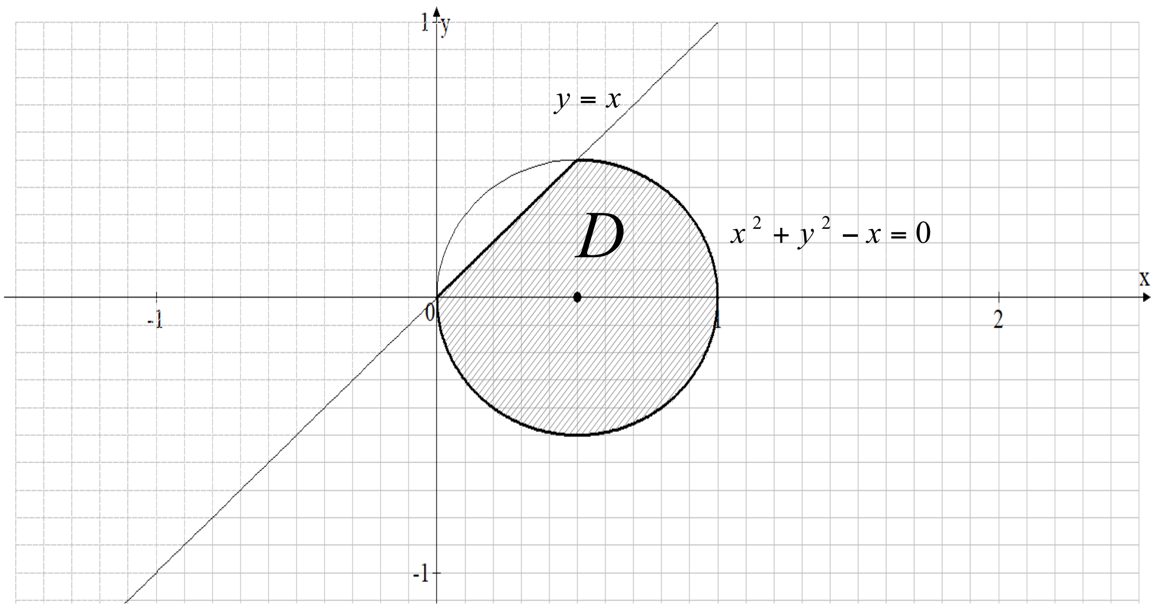
Область D ограничена окружностью $x^2+y^2-x=0$ и прямой $y=x$.

Преобразуем уравнение окружности:

$$x^2+y^2-x=0 \quad\Rightarrow\quad x^2-x+\frac{1}{4}+y^2=\frac{1}{4} \quad\Rightarrow\quad \left(x-\frac{1}{2}\right)^2+y^2=\left(\frac{1}{2}\right)^2.$$

Это окружность радиуса R = 1/2 с центром в точке (1/2; 0).

Построим схематично заданные линии и выделим область интегрирования D.



Переход к полярным координатам осуществляется по формулам:

$x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$, $dx\,dy=r\,dr\,d\varphi$.

Тогда:

$$x^2+y^2=\left(r\cos\varphi\right)^2+\left(r\sin\varphi\right)^2=r^2\left(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi\right)=r^2.$$

Для линий, ограничивающих область D, имеем:

$$x^2+y^2-x=0 \quad\Rightarrow\quad r^2-r\cos\varphi=0 \quad\Rightarrow\quad r=\cos\varphi \left(-\frac{\pi}{2}\le\varphi\le\frac{\pi}{2}\right);$$

$$y=x \quad\Rightarrow\quad \frac{y}{x}=1 \quad\Rightarrow\quad \frac{r\sin\varphi}{r\cos\varphi}=1 \quad\Rightarrow\quad \operatorname{tg}\varphi=1 \quad\Rightarrow\quad \begin{cases}\varphi=-\dfrac{3\pi}{4},\\ \varphi=\dfrac{\pi}{4}.\end{cases}.$$

Область D задаётся неравенствами:

$$D:\ \begin{cases}-\dfrac{\pi}{2}\le\varphi\le\dfrac{\pi}{4},\\ 0\le r\le\cos\varphi.\end{cases}$$

Вычислим двойной интеграл, переходя в нём к полярным координатам:

$$\iint\limits_D \left(x^2+y^2\right)^2 dx\,dy=\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/4}d\varphi\int\limits_0^{\cos\varphi}\left(r^2\right)^2\cdot r\,dr=\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/4}d\varphi\int\limits_0^{\cos\varphi}r^5\,dr=\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/4}\left(\left.\frac{r^6}{6}\right|_0^{\cos\varphi}\right)\cdot d\varphi=$$

$$=\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/4}\left(\frac{(\cos\varphi)^6}{6}-\frac{0^6}{6}\right)\cdot d\varphi=\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/4}\frac{(\cos\varphi)^6}{6}\,d\varphi=\frac{1}{48}\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/4}\left(2\cos^2\varphi\right)^3 d\varphi=$$

$$=\frac{1}{48}\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/4}\left(1+\cos2\varphi\right)^3 d\varphi=\frac{1}{48}\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/4}\left(1+3\cos2\varphi+3\cos^2 2\varphi+\cos^3 2\varphi\right)d\varphi=$$

$$=\frac{1}{48}\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/4}\left(1+3\cos^2 2\varphi+3\cos2\varphi+\cos^3 2\varphi\right)d\varphi=$$

$$=\frac{1}{48}\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/4}\left(1+\frac{3}{2}\cdot2\cos^2 2\varphi+\frac{3+\cos^2 2\varphi}{2}\cdot2\cos2\varphi\right)d\varphi=$$

$$=\frac{1}{48}\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/4}\left(1+\frac{3}{2}\cdot\left(1+\cos4\varphi\right)+\frac{3+\left(1-\sin^2 2\varphi\right)}{2}\cdot2\cos2\varphi\right)d\varphi=$$

$$=\frac{1}{48}\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/4}\left(\frac{5}{2}+\frac{3}{8}\cdot4\cos4\varphi+\left(2-\frac{1}{2}\cdot\sin^2 2\varphi\right)\cdot2\cos2\varphi\right)d\varphi=$$

$$=\frac{5}{96}\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/4}d\varphi+\frac{3}{384}\cdot\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/4}4\cos4\varphi\ d\varphi+\frac{1}{48}\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/4}\left(2-\frac{1}{2}\cdot\sin^2 2\varphi\right)\cdot2\cos2\varphi\ d\varphi=$$

$$=\frac{5}{96}\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/4}d\varphi+\frac{3}{384}\cdot\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/4}4\cos4\varphi\ d\varphi+\frac{1}{48}\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/4}\left(2-\frac{1}{2}\cdot\sin^2 2\varphi\right)\cdot d\left(\sin2\varphi\right)=$$

$$=\frac{5}{96}\cdot\varphi\Bigg|_{-\pi/2}^{\pi/4}+\frac{3}{384}\cdot\sin4\varphi\Bigg|_{-\pi/2}^{\pi/4}+\frac{1}{48}\cdot\left(2\cdot\sin2\varphi-\frac{1}{6}\cdot\sin^3 2\varphi\right)\Bigg|_{-\pi/2}^{\pi/4}=\frac{5}{96}\cdot\left(\frac{\pi}{4}-\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)+$$

$$+\frac{3}{384}\cdot\left(\sin\pi-\sin(-2\pi)\right)+\frac{1}{48}\cdot\left[\left(2\cdot\sin\frac{\pi}{2}-\frac{1}{6}\cdot\sin^3\frac{\pi}{2}\right)-\left(2\cdot\sin(-\pi)-\frac{1}{6}\cdot\sin^3(-\pi)\right)\right]=$$

$$=\frac{5}{96}\cdot\frac{3\pi}{4}+\frac{3}{384}\cdot(0-0)+\frac{1}{48}\cdot\left[\left(2\cdot1-\frac{1}{6}\cdot1\right)-\left(2\cdot0-\frac{1}{6}\cdot0\right)\right]=\frac{5\pi}{128}+\frac{11}{288}.$$

Ответ: $\iint\limits_D \left(x^2+y^2\right)^2 dx\,dy = \frac{5\pi}{128}+\frac{11}{288}$.

Задача 2 (формулировка полностью):

Решить задачу.

Найти массу пластинки D, если плотность $\mu = 7x^2 + 2y$,

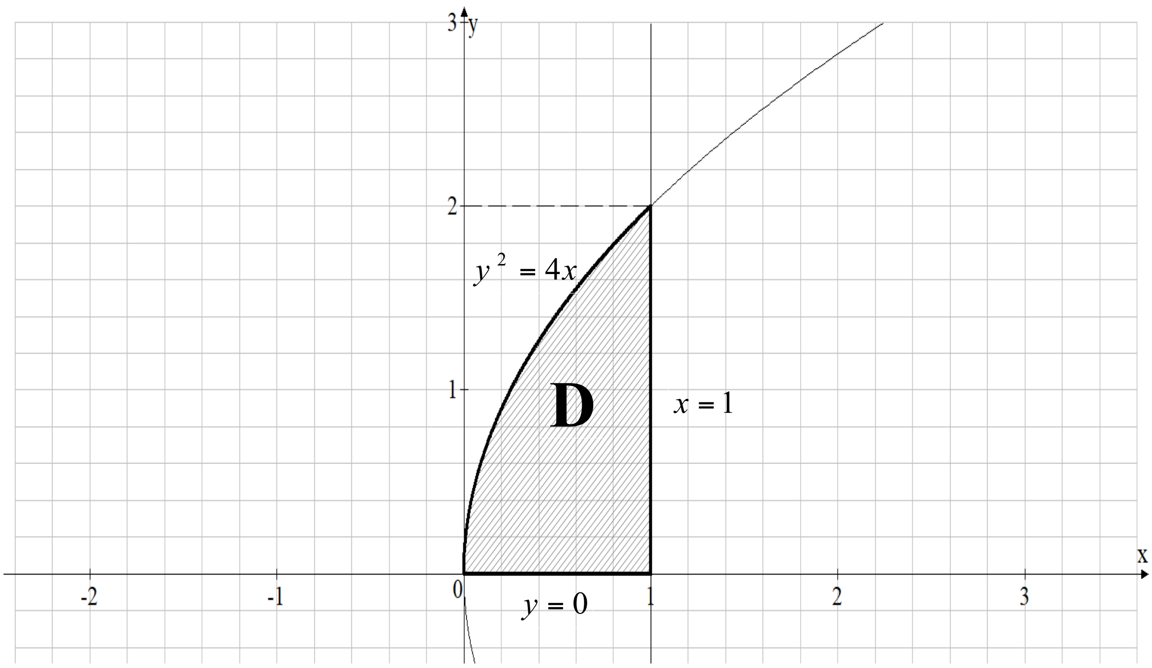
$D: \quad x = 1, \quad y \quad 0, \quad y^2 = 4x$.

Решение:

Масса плоской пластинки с плотностью $\mu(x, y)$, занимающей область D, вычисляется по формуле:

$$m = \iint\limits_D \mu(x, y)\, dx\, dy.$$

Построим схематично пластину D.



Определим пределы интегрирования:

$y^2 = 4x \quad \Rightarrow \quad y = \pm 2\sqrt{x}$;

область интегрирования $D: \begin{cases} 0 \le x \le 1, \\ 0 \le y \le 2\sqrt{x}. \end{cases}$

Найдём массу пластины:

$$m = \iint\limits_D \mu(x, y)\, dx\, dy = \int_0^1 dx \int_0^{2\sqrt{x}} \left(7x^2 + 2y\right) dy = \int_0^1 \left[\left(7x^2 \cdot y + y^2\right)\Big|_0^{2\sqrt{x}} \right] \cdot dx =$$

$$m=\iint_D \mu(x,y)\,dx\,dy=\int_0^1 dx\int_0^{2\sqrt{x}}\left(7x^2+2y\right)dy=\int_0^1\left[\left.\left(7x^2\cdot y+y^2\right)\right|_0^{2\sqrt{x}}\right]\cdot dx=$$

$$=\int_0^1\left[\left(7x^2\cdot 2\sqrt{x}+\left(2\sqrt{x}\right)^2\right)-\left(7x^2\cdot 0+0^2\right)\right]dx=\int_0^1\left(14x^{5/2}+4x\right)dx=$$

$$=\int_0^1\left(4\cdot\frac{7}{2}x^{5/2}+2\cdot 2x\right)dx=\left.\left(4\cdot x^{7/2}+2\cdot x^2\right)\right|_0^1=\left(4\cdot 1^{7/2}+2\cdot 1^2\right)-\left(4\cdot 0^{7/2}+2\cdot 0^2\right)=6\,.$$

Ответ: $m=6$ ед. массы.

Бланк выполнения задания 6

Задача 1 (формулировка полностью):

Найти модуль и главное значение аргумента комплексных чисел, записать это число в тригонометрической и показательной формах.

$z = 1 + i$.

Решение:

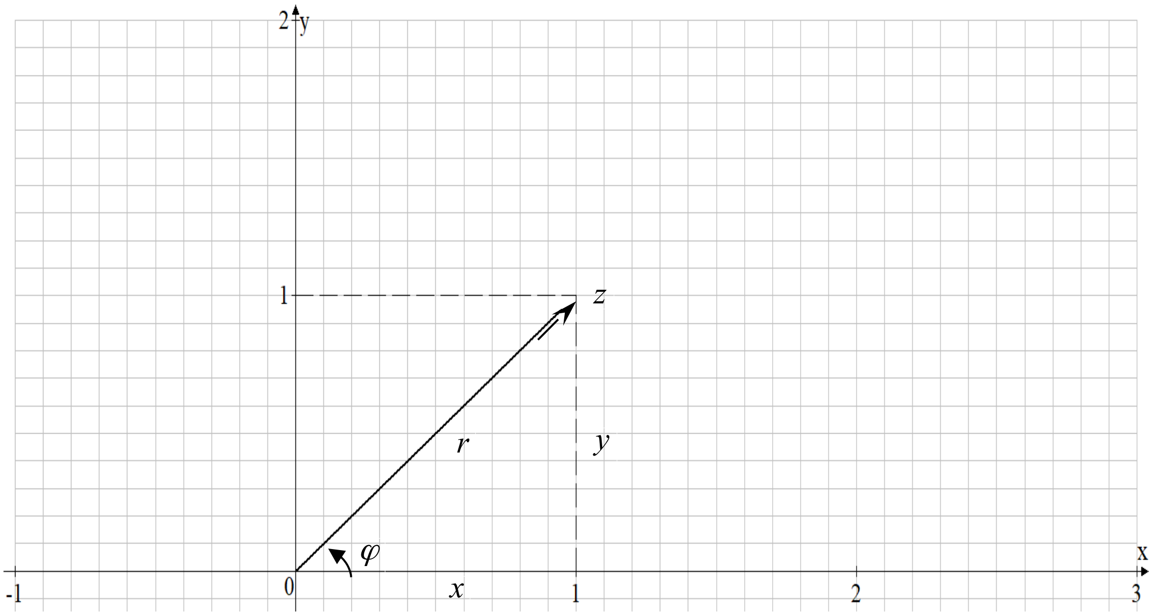
Комплексное число задано в алгебраической форме записи:

$z = x + i \cdot y = 1 + i$,

где $x = 1$ – действительная часть;

$y = 1$ – мнимая часть.

Изобразим это число на комплексной плоскости.



Найдём модуль комплексного числа:

$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$.

Найдём аргумент комплексного числа ($x > 0$, $y > 0$):

$\varphi = \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x} = \operatorname{arctg}\dfrac{1}{1} = \operatorname{arctg}1 = \dfrac{\pi}{4}$ рад.

Запишем комплексное число в тригонометрической форме:

$$z = r \cdot \left(\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi \right) = \sqrt{2} \cdot \left(\cos\frac{\pi}{4} + i \cdot \sin\frac{\pi}{4} \right).$$

Запишем комплексное число в показательной форме:

$$z = r e^{i\varphi} = \sqrt{2} \cdot e^{\frac{\pi}{4} i}.$$

Ответ: $r = \sqrt{2}$, $\varphi = \frac{\pi}{4}$, $z = \sqrt{2} \cdot \left(\cos\frac{\pi}{4} + i \cdot \sin\frac{\pi}{4} \right) = \sqrt{2} \cdot e^{\frac{\pi}{4} i}$.

Задача 2 (формулировка полностью):

Вычислите.

а) $\left(\frac{1+i\sqrt{2}}{-1-i}\right)^{40}$;

б) $\sqrt[3]{-3-3i}\cdot\sqrt[3]{-3-3i}$.

Решение:

а) $\left(\frac{1+i\sqrt{2}}{-1-i}\right)^{40}$.

Избавимся от комплексного знаменателя в дроби:

$$z=\frac{1+i\sqrt{2}}{-1-i}=\frac{\left(1+i\sqrt{2}\right)\left(-1+i\right)}{\left(-1-i\right)\left(-1+i\right)}=\frac{-1+i-\sqrt{2}\,i+\sqrt{2}\,i^2}{\left(-1\right)^2-\left(i\right)^2}=\frac{-1+i-\sqrt{2}\,i+\sqrt{2}\cdot\left(-1\right)}{1-\left(-1\right)}=$$

$$=\frac{-\left(\sqrt{2}+1\right)-\left(\sqrt{2}-1\right)i}{2};$$

$$z=-\frac{\sqrt{2}+1}{2}-\frac{\sqrt{2}-1}{2}\cdot i.$$

Найдём модуль и аргумент числа z и запишем его в тригонометрической форме:

$$x=-\frac{\sqrt{2}+1}{2}<0,\quad y=-\frac{\sqrt{2}-1}{2}<0;$$

$$r=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{\left(-\frac{\sqrt{2}+1}{2}\right)^2+\left(-\frac{\sqrt{2}-1}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{\left(2+2\sqrt{2}+1\right)+\left(2-2\sqrt{2}+1\right)}}{2}=\frac{\sqrt{6}}{2};$$

$$\varphi=\pi+\operatorname{arctg}\frac{y}{x}=\pi+\operatorname{arctg}\frac{-\frac{\sqrt{2}-1}{2}}{-\frac{\sqrt{2}+1}{2}}=\pi+\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}\approx 3{,}3115 \text{ рад};$$

$$z=\frac{\sqrt{6}}{2}\cdot\left(\cos 3{,}3115+i\cdot\sin 3{,}3115\right).$$

Возведём полученное число в степень, используя формулу Муавра:

$$\left(\frac{1+i\sqrt{2}}{-1-i}\right)^{40}=\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\cdot\left(\cos 3{,}3115+i\cdot\sin 3{,}3115\right)\right)^{40}=$$

$$=\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^{40}\cdot\left(\cos\left(40\cdot 3{,}3115\right)+i\cdot\sin\left(40\cdot 3{,}3115\right)\right)=\left(\frac{3}{2}\right)^{20}\cdot\left(\cos 132{,}46+i\cdot\sin 132{,}46\right).$$

Или в алгебраической форме:

$$\left(\frac{1+i\sqrt{2}}{-1-i}\right)^{40}\approx\left(\frac{3}{2}\right)^{20}\cdot\left(0{,}871+i\cdot 0{,}491\right)\approx 2896+1634\,i.$$

б) $\sqrt[3]{-3-3i}\cdot\sqrt[3]{-3-3i}$.

Преобразуем заданное выражение:

$$\sqrt[3]{-3-3i}\cdot\sqrt[3]{-3-3i}=\sqrt[3]{\left(-3-3i\right)^2}=\sqrt[3]{9+18i+9\cdot\left(-1\right)}=\sqrt[3]{18i}.$$

Найдём модуль и аргумент числа $z=18i$ и запишем его в тригонометрической форме:

$$x=0,\ \ y=18>0\quad\Rightarrow\quad r=\left|y\right|=18,\ \ \varphi=\frac{\pi}{2};$$

$$z=18\cdot\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\cdot\sin\frac{\pi}{2}\right).$$

Корень n-й степени из комплексного числа, заданного в тригонометрической форме $z=r\cdot\left(\cos\varphi+i\cdot\sin\varphi\right)$, находится по формуле:

$$\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{r}\cdot\left(\cos\frac{\varphi+2\pi k}{n}+i\cdot\sin\frac{\varphi+2\pi k}{n}\right),\quad \text{где } k=0,\ 1,\ldots,\ n-1.$$

Найдём:

$$\sqrt[3]{-3-3i}\cdot\sqrt[3]{-3-3i}=\sqrt[3]{18i}=\sqrt[3]{18\cdot\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\cdot\sin\frac{\pi}{2}\right)}=$$

$$=\sqrt[3]{18}\cdot\left(\cos\frac{\frac{\pi}{2}+2\pi k}{3}+i\cdot\sin\frac{\frac{\pi}{2}+2\pi k}{3}\right);$$

$$\sqrt[3]{-3-3i}\cdot\sqrt[3]{-3-3i}=\sqrt[3]{18}\cdot\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi}{3}k\right)+i\cdot\sin\left(\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi}{3}k\right)\right);$$

при k = 0 получаем:

$$\left(\sqrt[3]{-3-3i}\cdot\sqrt[3]{-3-3i}\right)_0=\sqrt[3]{18}\cdot\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\cdot\sin\frac{\pi}{6}\right)=\sqrt[3]{18}\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+i\cdot\frac{1}{2}\right)\approx 2{,}27+1{,}31i;$$

при k = 1 получаем:

$$\left(\sqrt[3]{-3-3i}\cdot\sqrt[3]{-3-3i}\right)_1=\sqrt[3]{18}\cdot\left(\cos\frac{5\pi}{6}+i\cdot\sin\frac{5\pi}{6}\right)=\sqrt[3]{18}\cdot\left(\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+i\cdot\frac{1}{2}\right)\approx$$

$$\approx -2{,}27+1{,}31i;$$

при k = 2 получаем:

$$\left(\sqrt[3]{-3-3i}\cdot\sqrt[3]{-3-3i}\right)_2=\sqrt[3]{18}\cdot\left(\cos\frac{3\pi}{2}+i\cdot\sin\frac{3\pi}{2}\right)=\sqrt[3]{18}\cdot\left(0+i\cdot(-1)\right)=-2{,}62i.$$

Ответ:

а) $\left(\frac{1+i\sqrt{2}}{-1-i}\right)^{40}=\left(\frac{3}{2}\right)^{20}\cdot\left(\cos 132{,}46+i\cdot\sin 132{,}46\right)\approx 2896+1634\,i;$

б) $\left(\sqrt[3]{-3-3i}\cdot\sqrt[3]{-3-3i}\right)_0=\sqrt[3]{18}\cdot\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\cdot\sin\frac{\pi}{6}\right)\approx 2{,}27+1{,}31i;$

$$\left(\sqrt[3]{-3-3i}\cdot\sqrt[3]{-3-3i}\right)_1=\sqrt[3]{18}\cdot\left(\cos\frac{5\pi}{6}+i\cdot\sin\frac{5\pi}{6}\right)\approx -2{,}27+1{,}31i;$$

$$\left(\sqrt[3]{-3-3i}\cdot\sqrt[3]{-3-3i}\right)_2=\sqrt[3]{18}\cdot\left(\cos\frac{3\pi}{2}+i\cdot\sin\frac{3\pi}{2}\right)=-2{,}62i.$$

Задача 3 (формулировка полностью):

Найдите значение действительной и мнимой частей функции.

$\omega = \dfrac{\overline{z}}{z}$.

Решение:

Приведём функцию к виду $\omega(z) = u(x, y) + i \cdot v(x, y)$ (учтём, что $z = x + iy$, $\overline{z} = x - iy$):

$$\omega = \frac{x - iy}{x + iy} = \frac{(x - iy)\cdot(x - iy)}{(x + iy)\cdot(x - iy)} = \frac{x^2 - 2xyi + i^2 \cdot y^2}{x^2 - i^2 \cdot y^2} = \frac{x^2 - 2xyi + (-1)\cdot y^2}{x^2 - (-1)\cdot y^2} =$$

$$= \frac{(x^2 - y^2) - 2xyi}{x^2 + y^2} = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} - i \cdot \frac{2xy}{x^2 + y^2}.$$

Таким образом:

$\operatorname{Re}\omega = u(x, y) = \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ – действительная часть функции;

$\operatorname{Im}\omega = v(x, y) = -\dfrac{2xy}{x^2 + y^2}$ – мнимая часть функции.

Ответ: $\operatorname{Re}\omega = \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$, $\operatorname{Im}\omega = -\dfrac{2xy}{x^2 + y^2}$.

Задача 4 (формулировка полностью):

Дана функция $\omega = \overline{z} \cdot z^2$. Найти значение функции при заданном значении *z*.

$z = 1 + i$.

Решение:

Вычислим значение функции при заданном значении z:

$z = 1 + i$, $\overline{z} = 1 - i$;

$z^2 = (1 + i)^2 = 1 + 2i + (-1) = 2i$;

$\omega = \overline{z} \cdot z^2 = (1 - i) \cdot 2i = 2i - (-1) \cdot 2 = 2 + 2i$.

Ответ: $\omega = 2 + 2i$.

Задача 5 (формулировка полностью):

Найти Ln z.

$5-5i$.

Решение:

Определим модуль r и аргумент φ комплексного числа:

$z=5-5i \quad \Rightarrow \quad x=5>0,\ y=-5<0$;

$r=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{5^2+(-5)^2}=\sqrt{25+25}=\sqrt{50}=50^{\frac{1}{2}}$;

$\varphi=\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}=\operatorname{arctg}\dfrac{-5}{5}=-\operatorname{arctg}1=-\dfrac{\pi}{4}$ рад.

Запишем логарифм комплексного числа:

$\operatorname{Ln} z=\ln r+i\cdot(\varphi+2\pi k)$;

$\operatorname{Ln}(5-5i)=\ln 50^{\frac{1}{2}}+i\cdot\left(-\dfrac{\pi}{4}+2\pi k\right)=\dfrac{1}{2}\ln 50+i\cdot\left(-\dfrac{\pi}{4}+2\pi k\right)$.

Ответ: $\operatorname{Ln}(5-5i)=\dfrac{1}{2}\ln 50+i\cdot\left(-\dfrac{\pi}{4}+2\pi k\right)$.

Задача 6 (формулировка полностью):

Пользуясь условиями Коши – Римана, выяснить, является ли функция $\omega(z)$ дифференцируемой хотя бы в одной точке.

$\omega = \bar{z} \cdot \operatorname{Im} \bar{z}$.

Решение:

Приведём функцию к виду $\omega(z) = u(x, y) + i \cdot v(x, y)$ (учтём, что $z = x + iy$, $\bar{z} = x - iy$):

$\operatorname{Im} \bar{z} = -y$;

$\omega = \bar{z} \cdot \operatorname{Im} \bar{z} = (x - iy) \cdot (-y) = -xy + i \cdot y^2$;

$u(x, y) = -xy$ – действительная часть функции;

$v(x, y) = y^2$ – мнимая часть функции.

Найдём частные производные от функций u(x; y) и v(x; y):

$$\frac{\partial u}{\partial x} = (-xy)'_x = -y;$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = (-xy)'_y = -x;$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = (y^2)'_x = 0;$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = (y^2)'_y = 2y.$$

Проверим, выполняются ли условия Коши-Римана:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \Rightarrow \quad -y = 2y;$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \quad \Rightarrow \quad -x = 0.$$

Заметим, что условия Коши-Римана выполняются при x = 0, y = 0. Следовательно, функция ω(z) является дифференцируемой в точке (0; 0).

Ответ: функция ω(z) является дифференцируемой в точке (0; 0).