

МИНОБРНАУКИ РОССИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
«Тульский государственный университет»

Институт горного дела и строительства
 Кафедра «Строительство, строительные материалы и конструкции»

РГР №2
по дисциплине
СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА

**РАСЧЕТ СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМОЙ РАМЫ
НА ПРОЧНОСТЬ**

- Задача №1
МЕТОД СИЛ
Задача №2
МЕТОД ПЕРЕМЕЩЕНИЙ

Выполнил студент гр. ИБ360811:02 Завгородний А.К.
Проверил к.т.н., доцент Судакова И.А.

Тула 2024г.

Задача № 1.1. Расчет статически неопределенной рамы на прочность.

Метод сил

Для заданной расчетной схемы плоской статически неопределенной рамы сложной структуры необходимо:

1. Провести полный кинематический анализ и установить степень статической неопределенности двумя способами:
 - 1.1. По формуле Чебышева.
 - 1.2. По формуле контуров.
2. Выбрать основную систему метода сил:
 - 2.1. Предложить не менее 3-х вариантов основных систем метода сил.
 - 2.2. Обосновать выбор одной из ОСМС для последующего раскрытия статической неопределенности.
3. Реализовать матричную форму метода сил для выбранной основной системы в предположении, что определяющим силовым фактором в ее сечениях является изгибающий момент.
4. Построить эпюры усилий M , Q и N в заданной расчетной схеме:
 - 4.1. Построить эпюру поперечных сил методом графического дифференцирования эпюр изгибающих моментов.
 - 4.2. Построить эпюру продольных усилий методом вырезания узлов на эпюре поперечных усилий.
5. Определить реакции внешних связей в заданной расчетной схеме по построенным эпюрам усилий.
6. Провести контроль правильности полученных результатов:
 - 6.1. Проверить равновесие части ЗРС с использованием найденных реакций лишних связей и опорных реакций.
 - 6.2. Оценить погрешность полученных результатов.

Из	Лист	№ докум.	Подп.	Дата

Лист

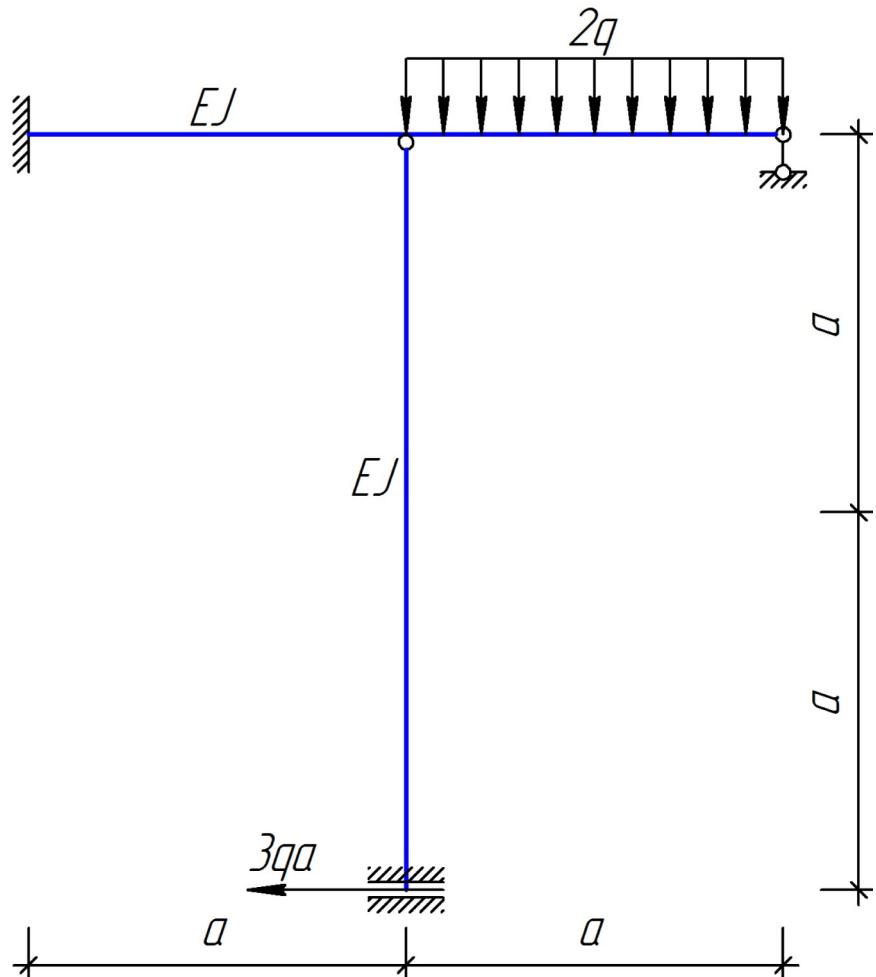


Рисунок 1

Решение.

1. Выбор основной системы метода сил на основе кинематического анализа.

Из м.	Лист	№ докум.	Подп.	Дата

Лист

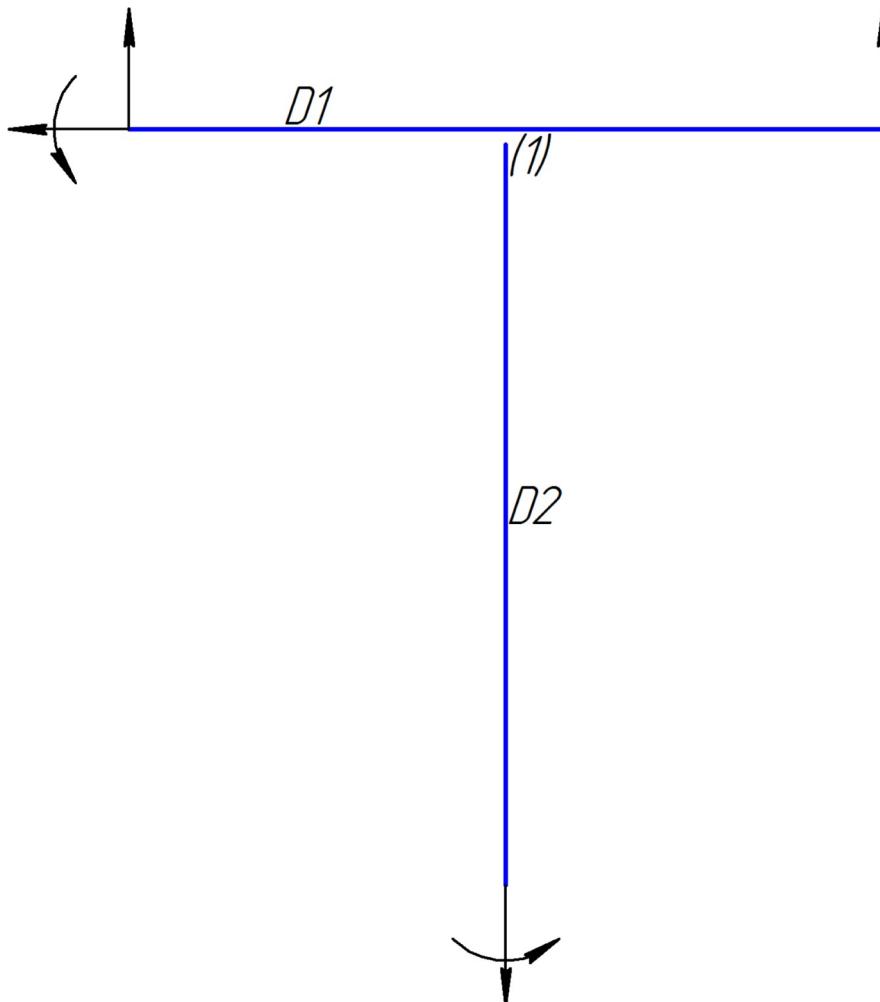


Рисунок 2

1.1. Определение числа степеней свободы по формуле Чебышева (рисунок 2):

$$W = 3D - 2III - C_o$$

$$D = 2$$

$$III = 1$$

$$C_o = 6$$

$$W = 3 \cdot 2 - 2 \cdot 1 - 6 = -2$$

Из м.	Лист	№ докум.	Подп.	Дата

Лист

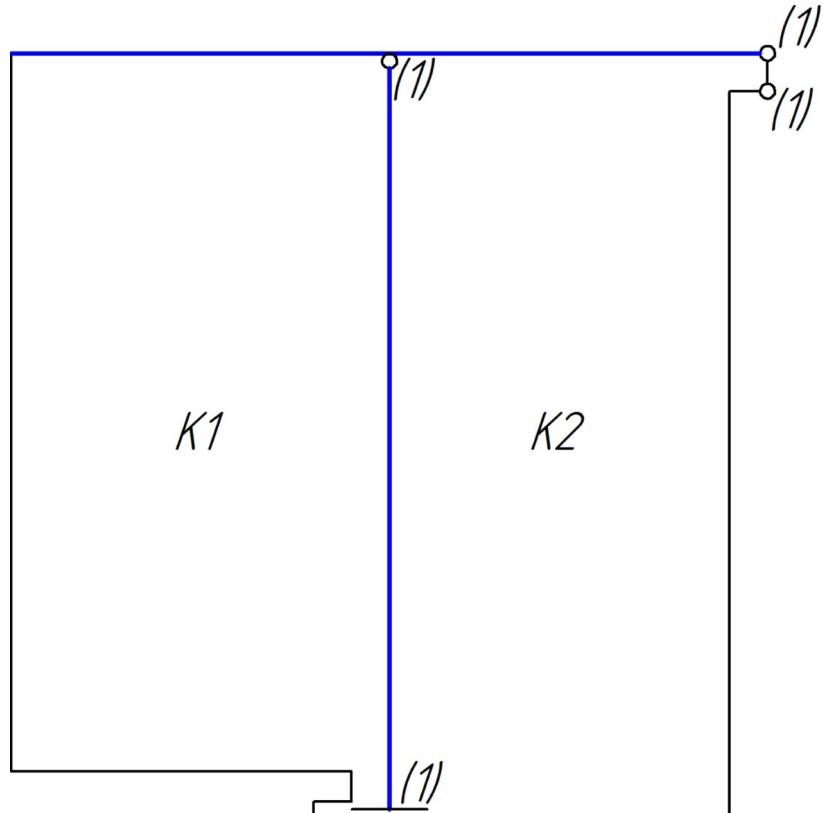


Рисунок 3

Определение числа степеней свободы по формуле контуров (рисунок 3):

$$W = III - 3K$$

$$III = 4$$

$$K = 2$$

$$W = 4 - 3 \cdot 2 = -2$$

Следовательно, заданная расчетная схема дважды статически неопределенна.

Из м.	Лист	№ докум.	Подп.	Дата

Лист

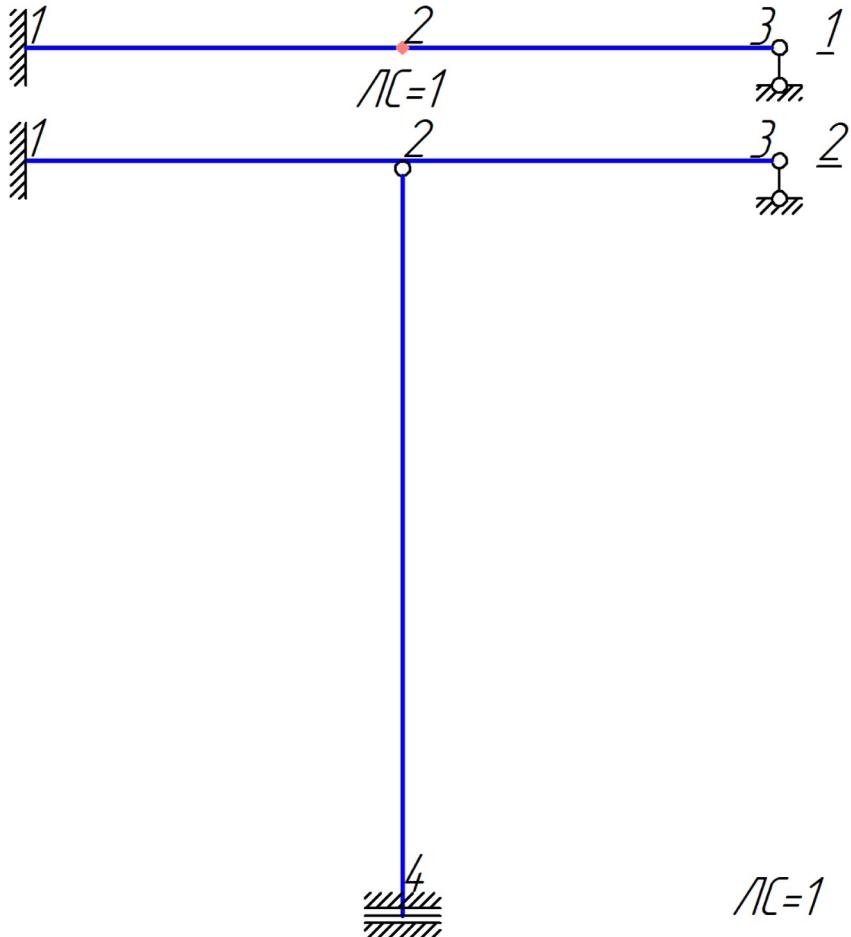


Рисунок 4

Данная ЗРС состоит из двух этажей. Разложим расчетную схему на этажи с указанием лишних связей на каждом из них (рисунок 4):

первый этап образования: балка-ригель 1-2-3 присоединяется к земле в т.1 с помощью трех опорных связей, в т.3 – одной опорной связи, следовательно, на этом этапе одна лишняя связь;

второй этап образования: балка-стойка 2-4 присоединяется к земле в т.4 с помощью двух опорных связей и к балке-ригелю 1-2-3 с помощью двух внутренних связей, следовательно, на этом этапе тоже одна лишняя связь.

Таким образом, для всей ЗРС число лишних связей равно двум, что подтверждается сделанными ранее вычислениями.

1.2. Рассмотрим возможные варианты основной системы метода сил (ОСМС).

Из м.	Лист	№ докум.	Подп.	Дата

Лист

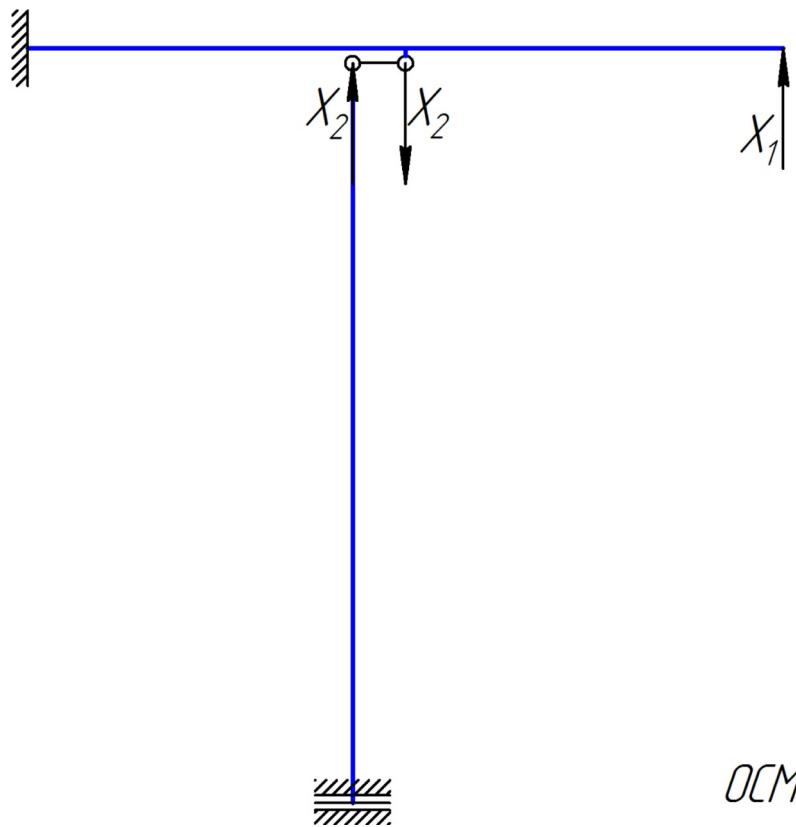


Рисунок 5

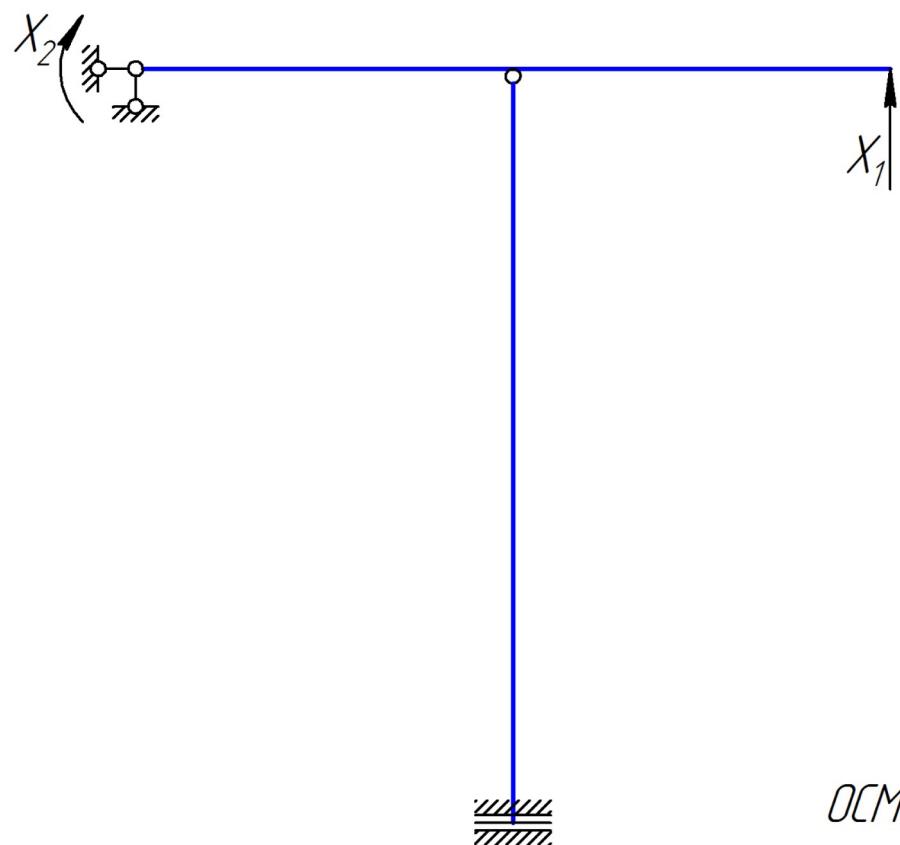


Рисунок 6

Из м.	Лист	№ докум.	Подп.	Дата

Лист

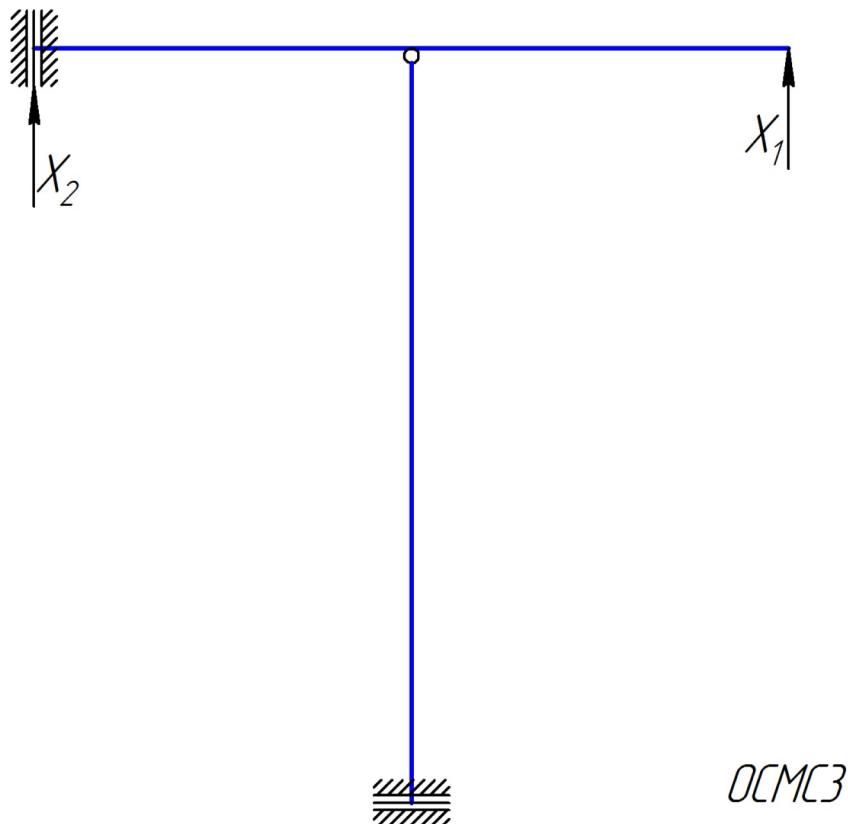


Рисунок 7

1.3. Для дальнейшего расчета выбираем ОСМС №1, так как она проще для понимания схемы образования.

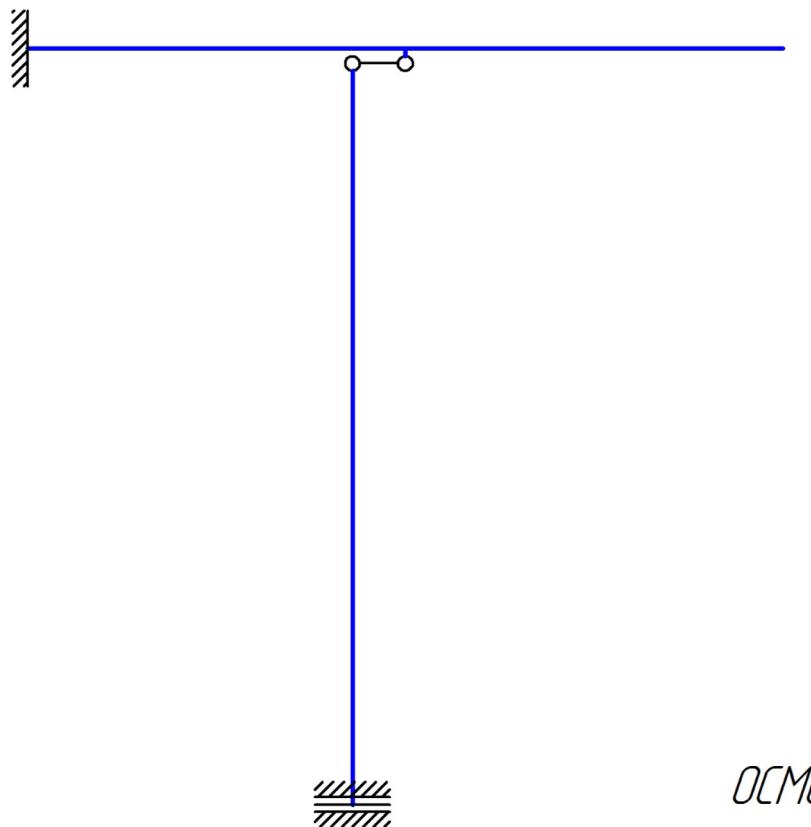
2. Реализация метода сил в матричном виде.

2.1. Еще раз обратим внимание на основные расчетные схемы для данной задачи:

- заданная расчетная схема (рисунок 1);
- основная система метода сил – это такая статически определимая геометрически неизменяемая система, которая получена из ЗРС путем отбрасывания лишних связей (рисунок 8);

Из м.	Лист	№ докум.	Подп.	Дата

Лист



ОСМС

Рисунок 8

– эквивалентная расчетная схема – это основная система метода сил, воспринимающая заданную расчетную нагрузку и дополнительные силы, которые приложены в направлении отброшенных связей (рисунок 9).

Из м.	Лист	№ докум.	Подп.	Дата

Лист

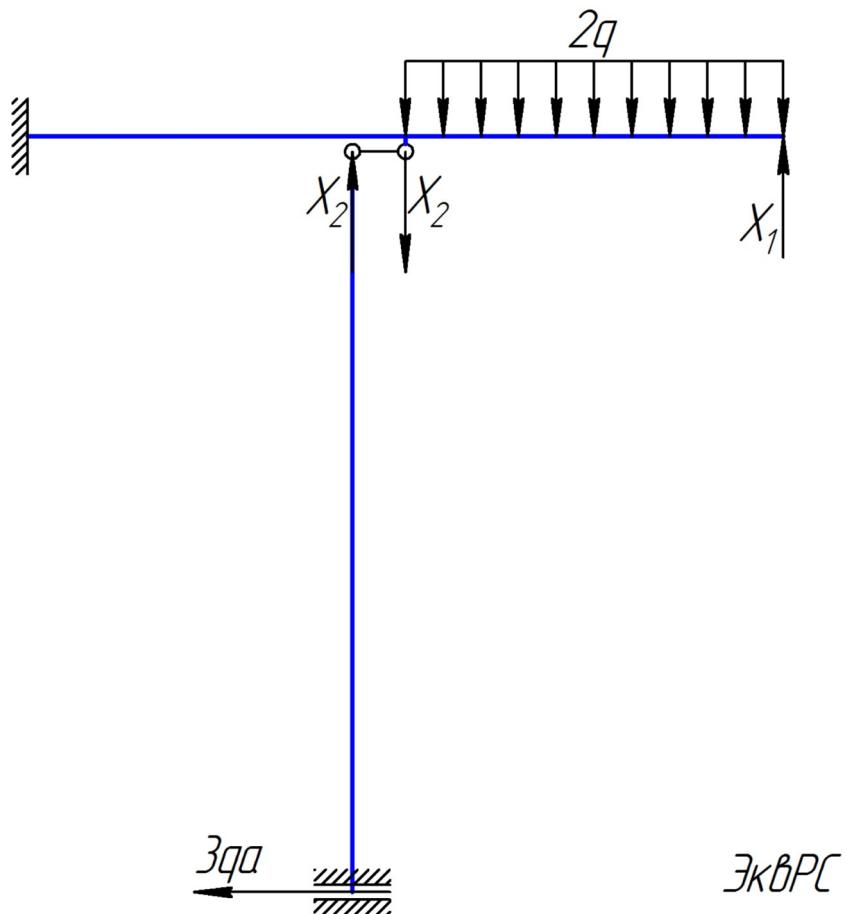


Рисунок 9

2.2. Порядок расчета ОСМС.

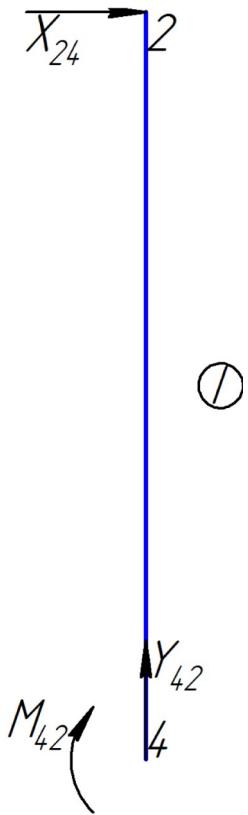


Рисунок 10

Из м.	Лист	№ докум.	Подп.	Дата

Лист

$$\sum mom_2 = 0 \Rightarrow M_{42}$$

$$\sum X = 0 \Rightarrow X_{24}$$

$$\sum Y = 0 \Rightarrow Y_{42}$$

Контроль:

$$\sum mom_4 = 0$$

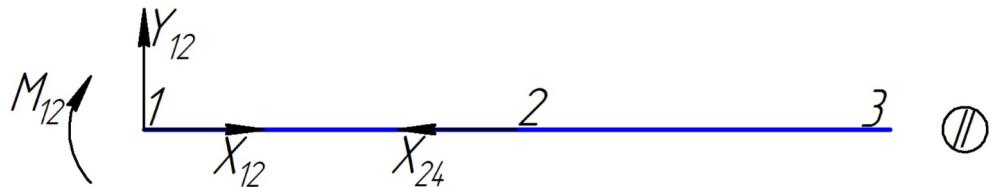


Рисунок 11

$$\sum mom_1 = 0 \Rightarrow M_{12}$$

$$\sum X = 0 \Rightarrow X_{12}$$

$$\sum Y = 0 \Rightarrow Y_{12}$$

Контроль:

$$\sum mom_3 = 0$$

2.3. Построение эпюр изгибающих моментов в ОСМС.

2.3.1. От действия внешней заданной нагрузки.

Из м.	Лист	№ докум.	Подп.	Дата

Лист

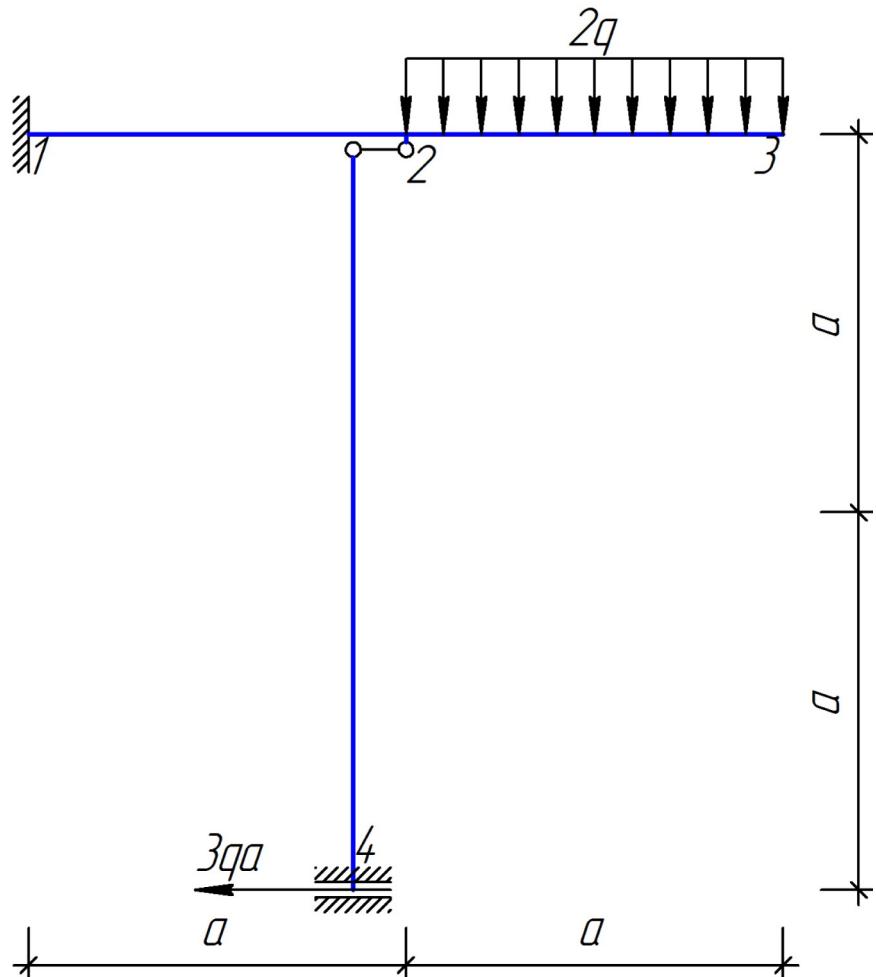
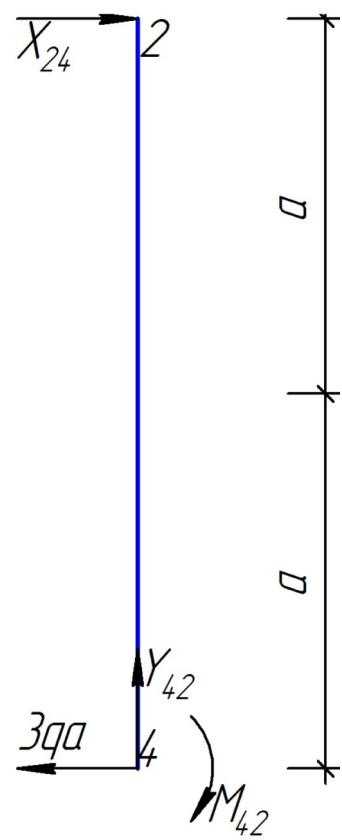


Рисунок 12



Из м.	Лист	№ докум.	Подп.	Дата

Лист

Рисунок 13

$$\Sigma mom_2 = -M_{42} - 3qa \cdot 2a = 0$$

$$M_{42} = -6qa^2$$

$$\Sigma X = -3qa + X_{24} = 0$$

$$X_{24} = 3qa$$

$$\Sigma Y = Y_{42} = 0$$

Контроль:

$$\Sigma mom_4 = -M_{42} - X_{24} \cdot 2a = -(-6qa^2) - 3qa \cdot 2a = 0$$

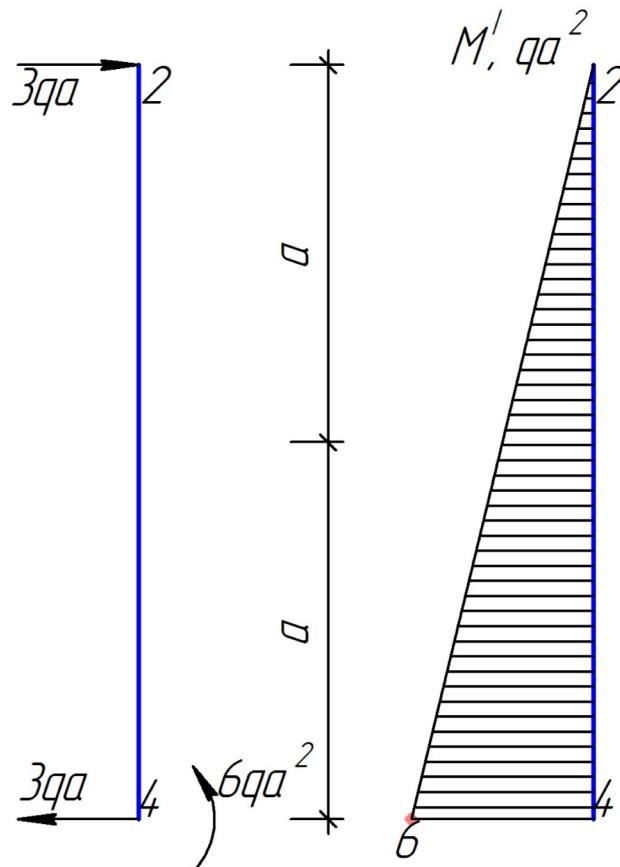


Рисунок 14

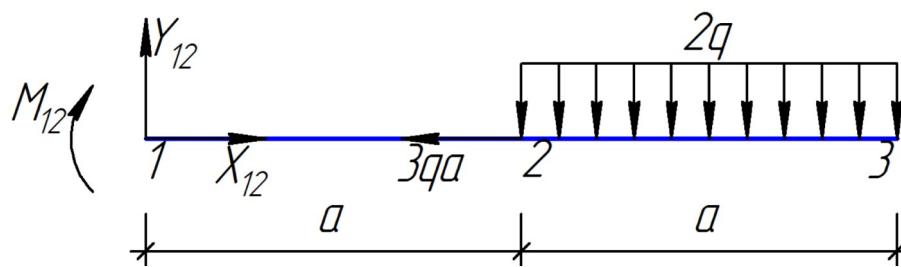


Рисунок 15

Из м.	Лист	№ докум.	Подп.	Дата

Лист

$$\sum mom_1 = -M_{12} - 2q \cdot a \cdot \left(a + \frac{a}{2} \right) = 0$$

$$M_{12} = -3qa^2$$

$$\sum X = X_{12} - 3qa = 0$$

$$X_{12} = 3qa$$

$$\sum Y = Y_{12} - 2q \cdot a = 0$$

$$Y_{12} = 2qa$$

Контроль:

$$\sum mom_3 = -M_{12} - Y_{12} \cdot 2a + 2q \cdot a \cdot \frac{a}{2} = -(-3qa^2) - 2qa \cdot 2a + qa^2 = 0$$

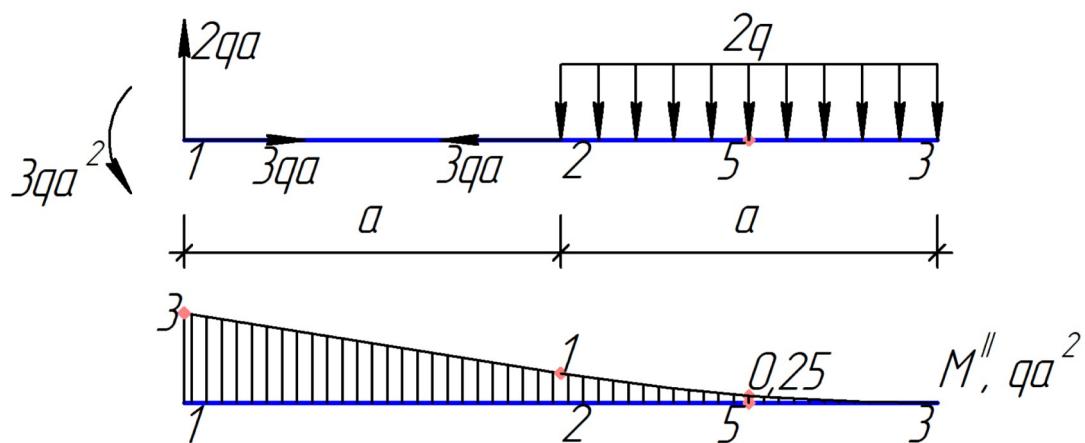


Рисунок 16

Из м.	Лист	№ докум.	Подп.	Дата

Лист

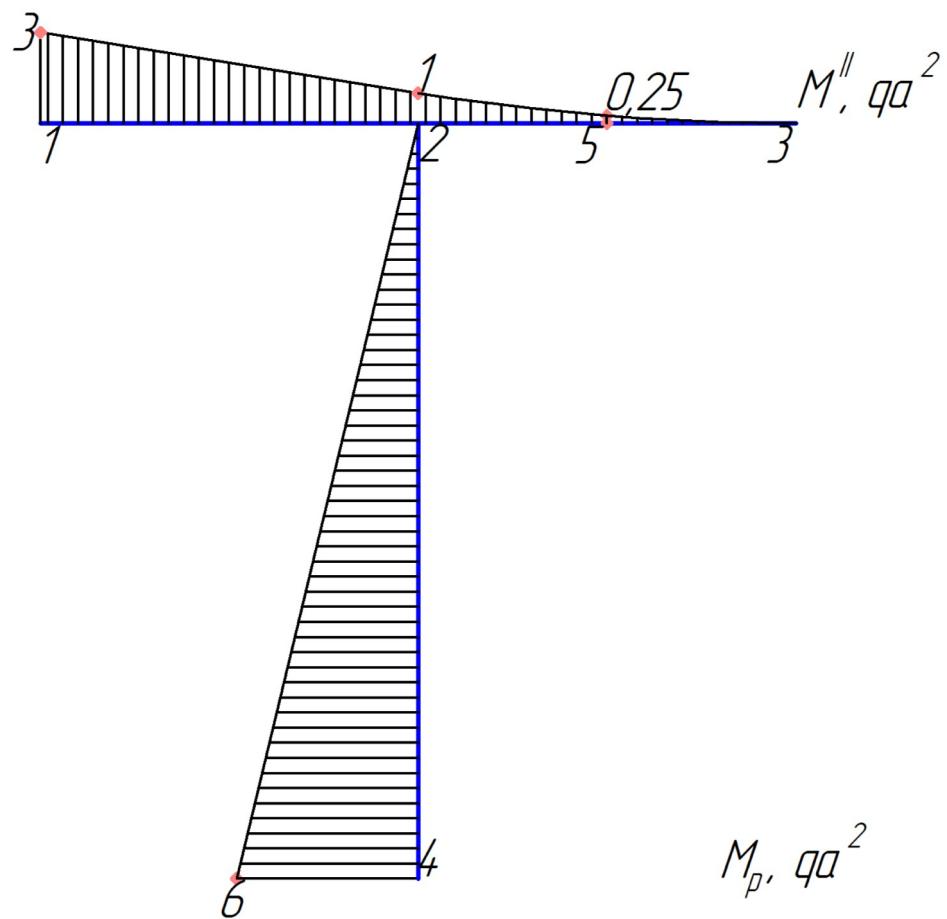


Рисунок 17

2.3.2. От действия единичного усилия $X_1=1$.

Из м.	Лист	№ докум.	Подп.	Дата

Лист

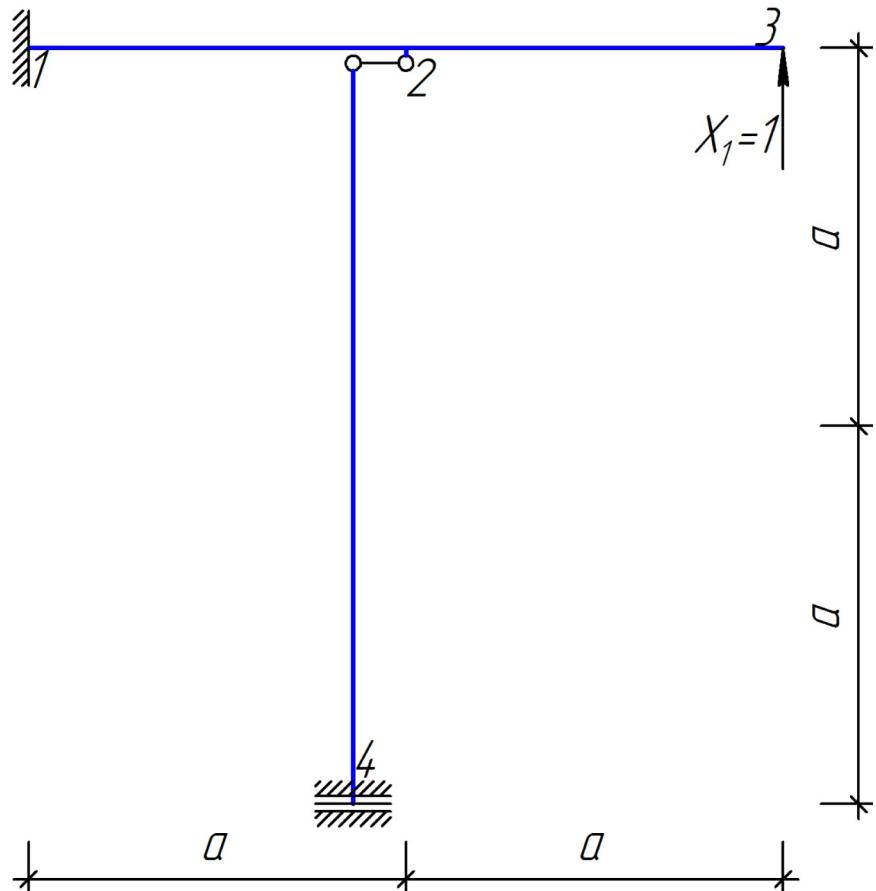


Рисунок 18

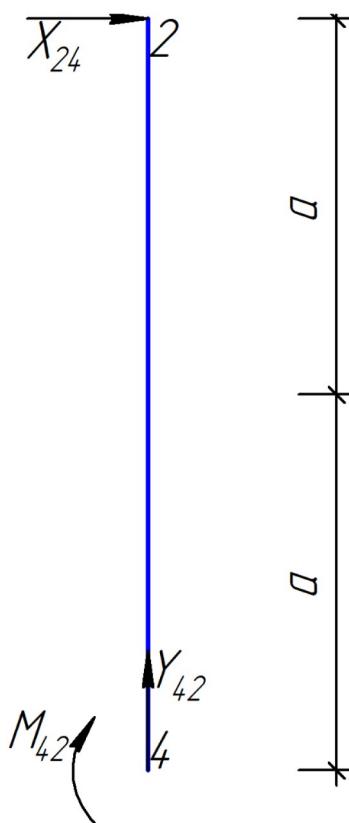


Рисунок 19

Из м.	Лист	№ докум.	Подп.	Дата

Лист

$$\sum mom_2 = -M_{42} = 0$$

$$M_{42} = 0$$

$$\sum X = X_{24} = 0$$

$$\sum Y = Y_{42} = 0$$

Контроль:

$$\sum mom_4 = -M_{42} - X_{24} \cdot 2a = -0 - 0 \cdot 2a = 0$$

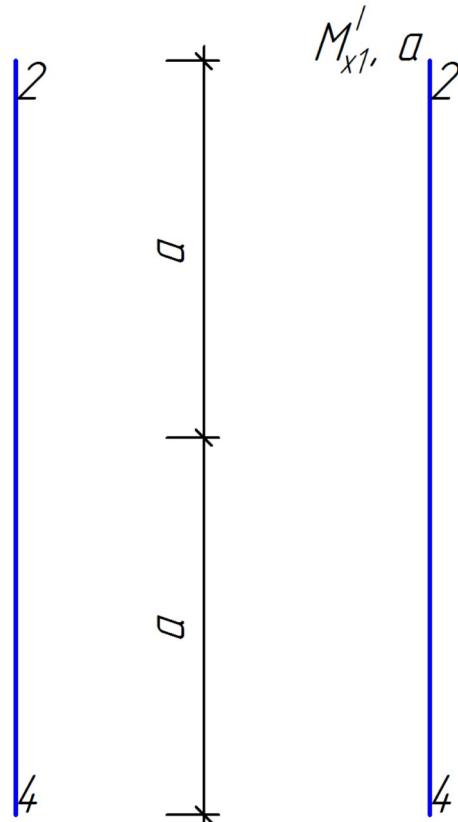


Рисунок 20

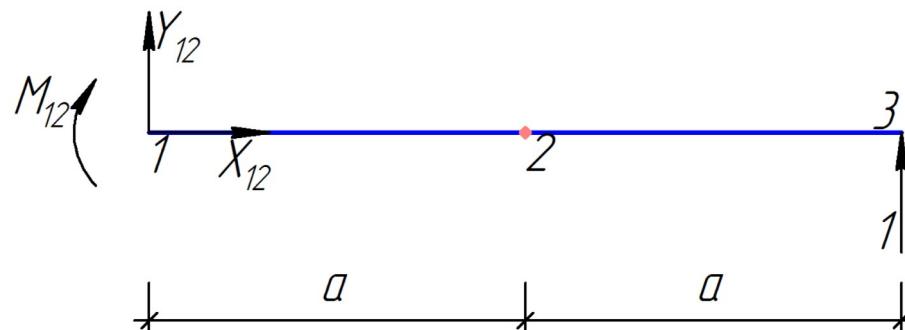


Рисунок 21

$$\sum mom_1 = -M_{12} + 1 \cdot 2a = 0$$

Из м.	Лист	№ докум.	Подп.	Дата

Лист

$$M_{12} = 2a$$

$$\Sigma X = X_{12} = 0$$

$$\Sigma Y = Y_{12} + 1 = 0$$

$$Y_{12} = -1$$

Контроль:

$$\Sigma mom_3 = -M_{12} \cdot Y_{12} \cdot 2a = -2a \cdot (-1) \cdot 2a = 0$$

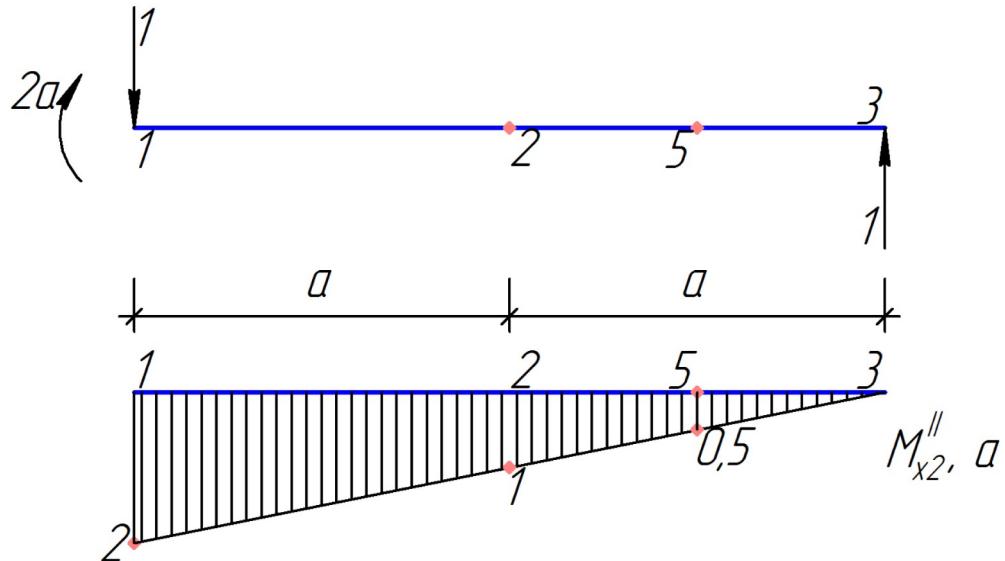
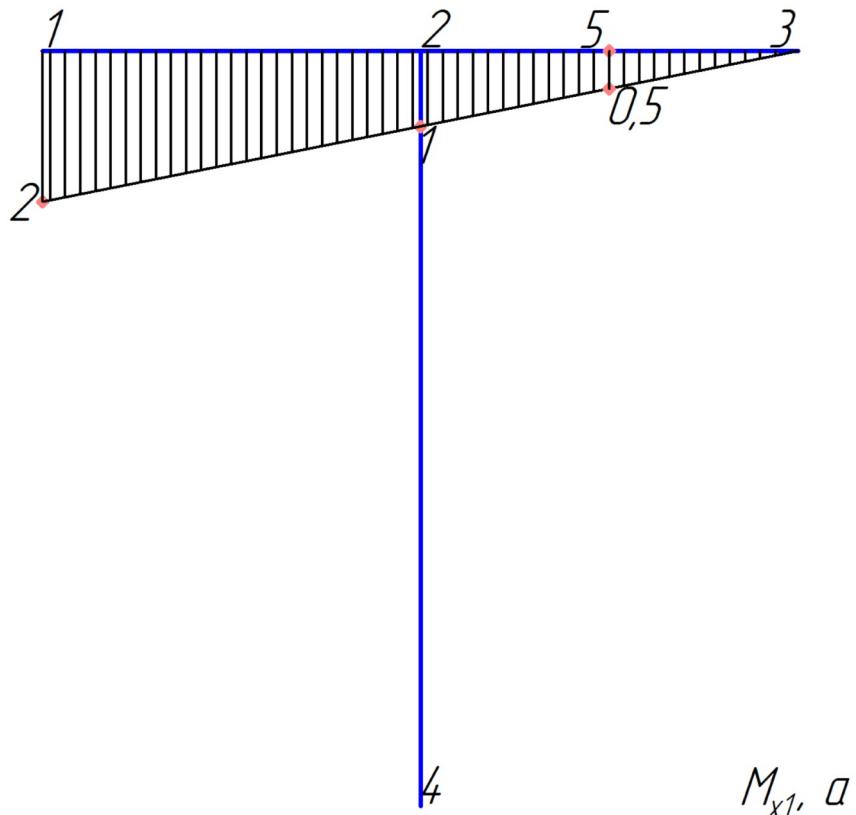


Рисунок 22



Из м.	Лист	№ докум.	Подп.	Дата

Лист

Рисунок 23

2.3.3. От действия единичного усилия $X_2=1$.

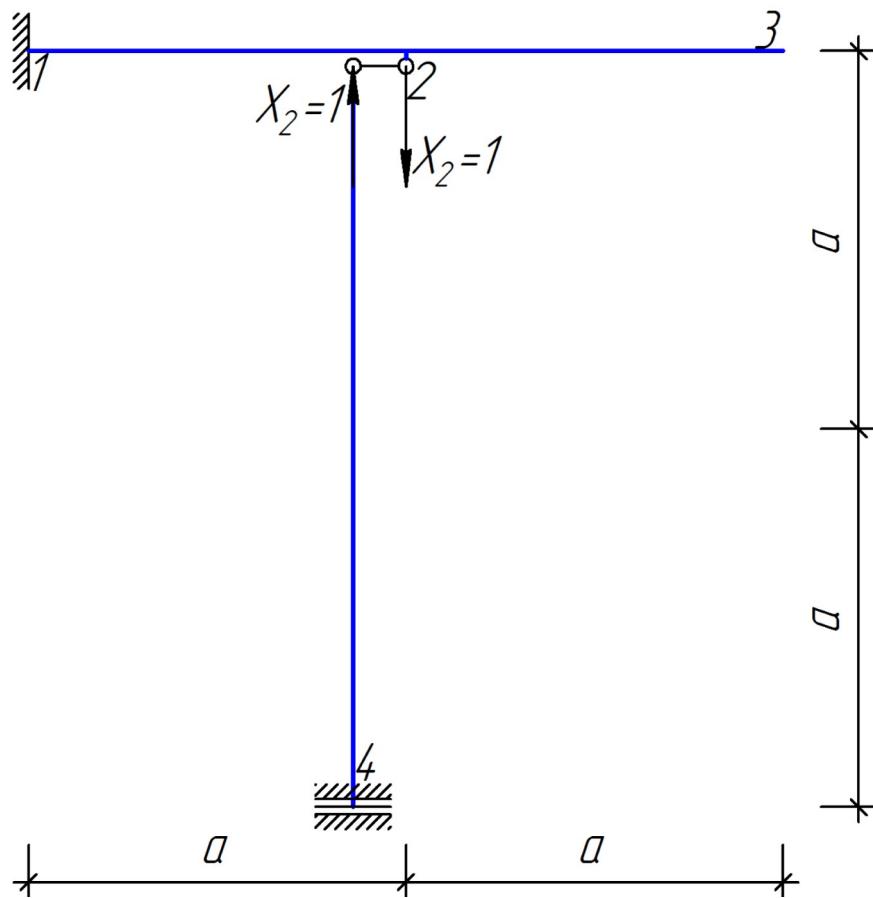


Рисунок 24

Из м.	Лист	№ докум.	Подп.	Дата

Лист

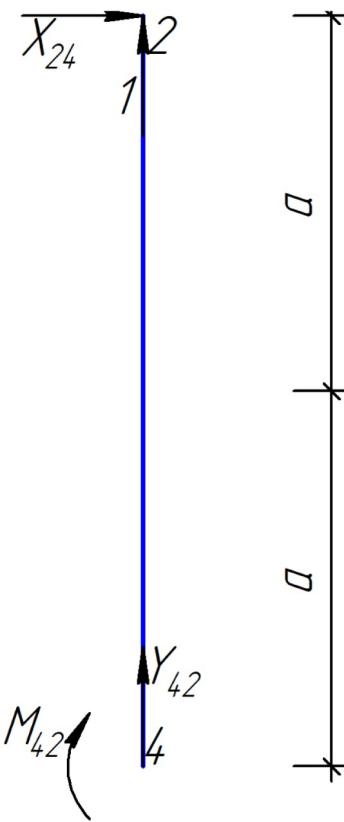


Рисунок 25

$$\sum mom_2 = -M_{42} = 0$$

$$M_{42} = 0$$

$$\sum X = X_{24} = 0$$

$$\sum Y = Y_{42} + 1 = 0$$

$$Y_{42} = -1$$

Контроль:

$$\sum mom_4 = -M_{42} - X_{24} \cdot 2a = -0 - 0 \cdot 2a = 0$$

Из м.	Лист	№ докум.	Подп.	Дата

Лист

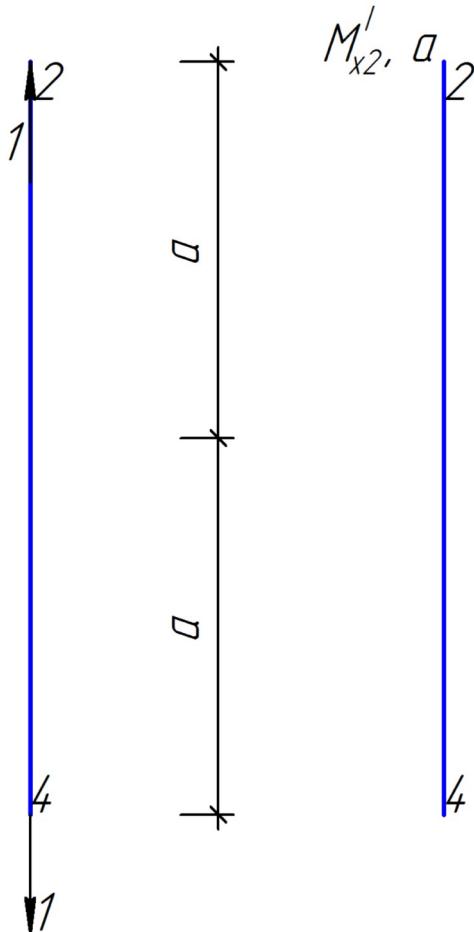


Рисунок 26

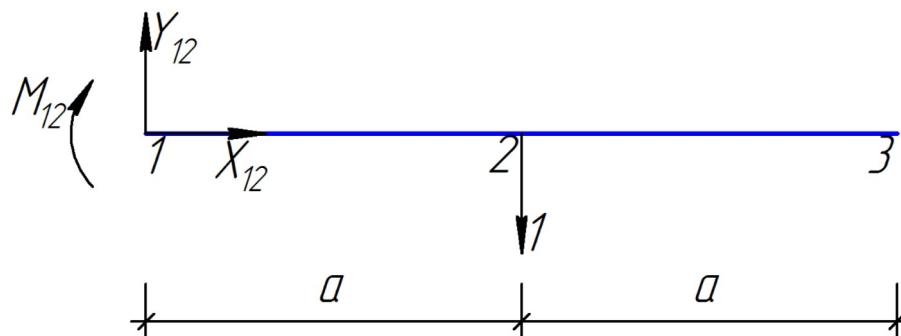


Рисунок 27

$$\Sigma mom_1 = -M_{12} - 1 \cdot a = 0$$

$$M_{12} = -a$$

$$\Sigma X = X_{12} = 0$$

$$\Sigma Y = Y_{12} - 1 = 0$$

$$Y_{12} = 1$$

Контроль:

$$\Sigma mom_3 = -M_{12} - Y_{12} \cdot 2a + 1 \cdot a = -(-a) - 1 \cdot 2a + 1 \cdot a = 0$$

Из м.	Лист	№ докум.	Подп.	Дата

Лист

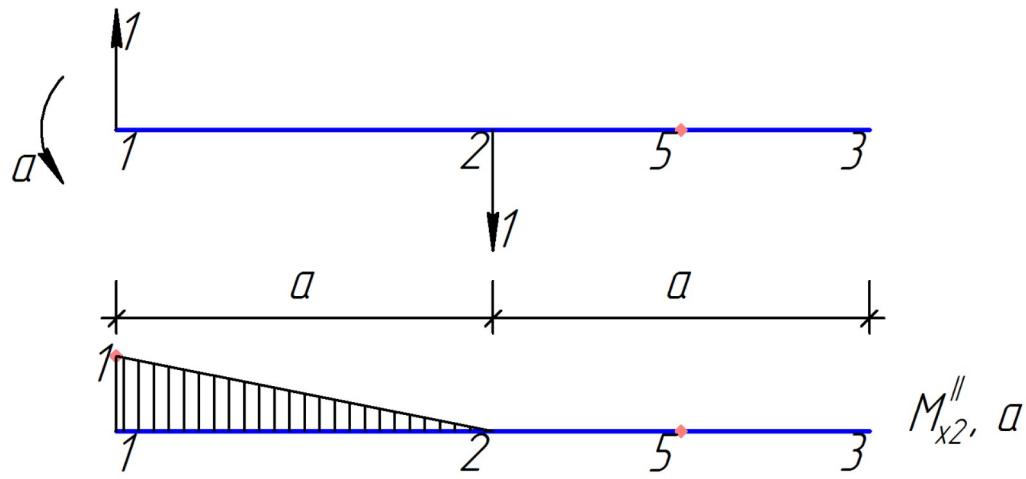


Рисунок 28

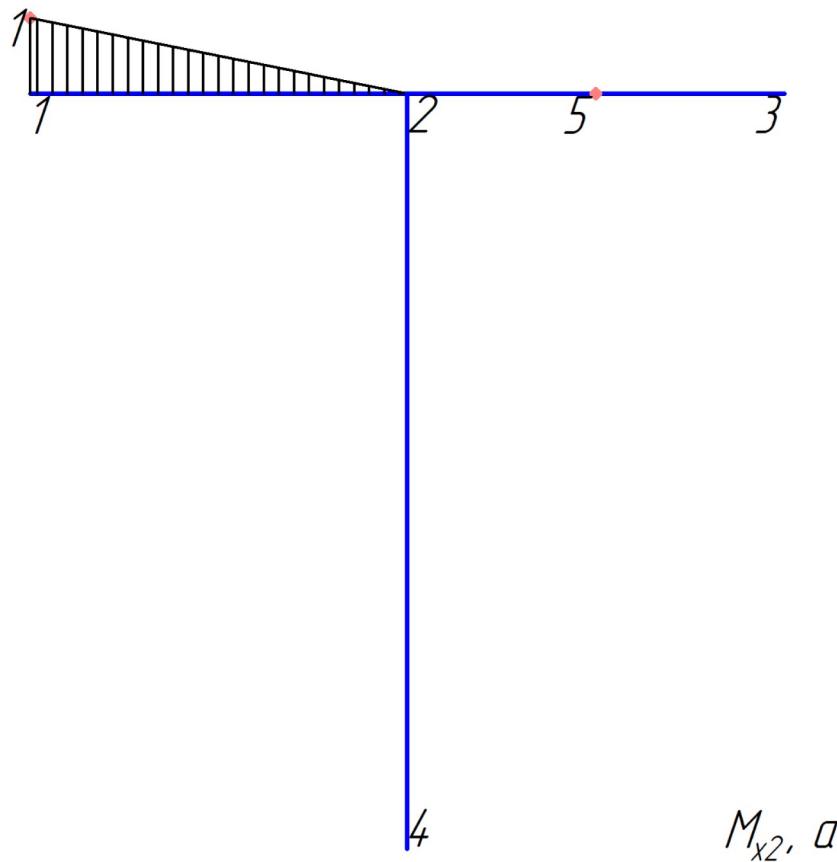


Рисунок 29

2.4. Разработка схемы дискретизации и формирование матриц.

Для реализации метода сил в матричном виде запишем каноническую систему уравнений метода сил:

$$[\delta_{ij}] \{X_j\} + [\Delta_j] = [0]$$

или в развернутом виде

Из м.	Лист	№ докум.	Подп.	Дата

Лист

$$\begin{cases} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \Delta_{1p} = 0 \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \Delta_{2p} = 0 \end{cases}$$

Матрица коэффициентов при неизвестных:

$$\begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} \\ \delta_{21} & \delta_{22} \end{bmatrix}$$

$$[\delta] = [M_x]^T \cdot [B] \cdot (M_x)$$

Вектор свободных коэффициентов:

$$\begin{bmatrix} \Delta_{1p} \\ \Delta_{2p} \end{bmatrix}$$

$$[\Delta] = [M_x]^T \cdot [B] \cdot (M_p)$$

Вектор неизвестных:

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix}$$

Для формирования основных матриц необходимо разработать схему дискретизации, которая выполняется с учетом всех исходных эпюор (рисунок 30).

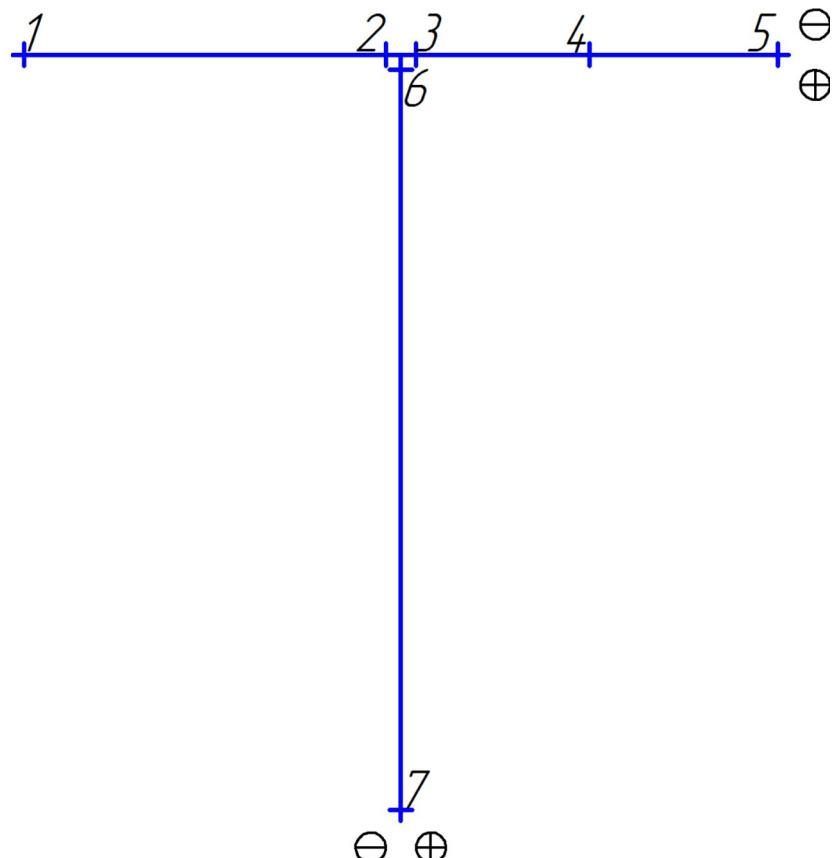


Рисунок 30

Из м.	Лист	№ докум.	Подп.	Дата

Лист

$$M_p = q a^2 \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ -1 \\ -0,25 \\ 0 \\ 0 \\ -6 \end{pmatrix}$$

$$M_x = \begin{pmatrix} 2a & -a \\ a & 0 \\ a & 0 \\ 0,5a & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$b_{1-2} = \frac{a}{6EJ} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$b_{3-5} = \frac{a}{6EJ} \begin{bmatrix} 1 & \cancel{1} \\ 4 & \cancel{1} \end{bmatrix}$$

$$b_{6-7} = \frac{2a}{6EJ} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \frac{a}{6EJ} \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$B = \frac{a}{6EJ} \cancel{1}$$

Оптимизируем матрицы, уменьшая их размер. Так как в «грузовой» и «единичной» матрицах одновременно нулевыми являются строки 5, 6, вычеркиваем их из этих матриц, а в матрице податливости удаляем столбцы и строки с этими номерами.

Дальнейший анализ матриц с ординатами изгибающего момента обнаруживает одинаковые смежные строки со следующими номерами: 2-3, одну из пары в которых можно также удалить в «грузовой» и «единичной» матрицах и объединить в матрице податливости.

Окончательно получим:

$$M_p = q a^2 \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ -0,25 \\ -6 \end{pmatrix}$$

$$M_x = \begin{pmatrix} 2a & -a \\ a & 0 \\ 0,5a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Из м.	Лист	№ докум.	Подп.	Дата

Лист

$$B = \frac{a}{6EJ} \cdot \textcolor{red}{i}$$

2.5. Решение КСУ МС.

Сформируем каноническую систему уравнений метода сил:

$$[\delta] = (M_x)^T \cdot [B] \cdot (M_x)$$

$$[\Delta] = (M_x)^T \cdot [B] \cdot (M_p)$$

$$C = (M_x)^T \cdot [B] = \begin{pmatrix} 2a & -a \\ a & 0 \\ 0,5a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^T \cdot \frac{a}{6EJ} \cdot \textcolor{red}{i}$$

$$= \frac{a}{6EJ} \begin{pmatrix} 5a & 5a & 2a & 0 \\ -2a & -a & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$[\delta] = (C) \cdot (M_x) = \frac{a}{6EJ} \begin{pmatrix} 5a & 5a & 2a & 0 \\ -2a & -a & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2a & -a \\ a & 0 \\ 0,5a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{a}{6EJ} \begin{pmatrix} 16a^2 & -5a^2 \\ -5a^2 & 2a^2 \end{pmatrix}$$

$$[\Delta] = (C) \cdot (M_p) = \frac{a}{6EJ} \begin{pmatrix} 5a & 5a & 2a & 0 \\ -2a & -a & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot qa^2 \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ -0,25 \\ -6 \end{pmatrix} = \frac{qa^3}{6EJ} \begin{pmatrix} -20,5a \\ 7a \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \frac{a}{6EJ} \cdot 16a^2 \cdot X_1 + \frac{a}{6EJ} \cdot (-5a^2) \cdot X_2 + \frac{qa^3}{6EJ} \cdot (-20,5a) = 0 \\ \frac{a}{6EJ} \cdot (-5a^2) \cdot X_1 + \frac{a}{6EJ} \cdot 2a^2 \cdot X_2 + \frac{qa^3}{6EJ} \cdot 7a = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{8a^3}{3EJ} \cdot X_1 - \frac{2,5a^3}{3EJ} \cdot X_2 - \frac{10,25qa^4}{3EJ} = 0 \\ -\frac{2,5a^3}{3EJ} \cdot X_1 + \frac{a^3}{3EJ} \cdot X_2 + \frac{3,5qa^4}{3EJ} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 8 \cdot X_1 - 2,5 \cdot X_2 - 10,25qa = 0 \\ -2,5 \cdot X_1 + X_2 + 3,5qa = 0 \end{cases}$$

Решая полученную систему линейных алгебраических уравнений,

получим:

$$X_2 = 2,5 \cdot X_1 - 3,5qa$$

$$8 \cdot X_1 - 2,5 \cdot (2,5 \cdot X_1 - 3,5qa) - 10,25qa = 0$$

$$8 \cdot X_1 - 6,25 \cdot X_1 + 8,75qa - 10,25qa = 0$$

Из м.	Лист	№ докум.	Подп.	Дата

Лист

$$1,75 \cdot X_1 - 1,5 qa = 0$$

$$X_1 = \frac{1,5 qa}{1,75} = \frac{6}{7} qa$$

$$X_2 = 2,5 \cdot \frac{6}{7} qa - 3,5 qa = -\frac{9,5}{7} qa$$

2.6. Матричная форма эпюры изгибающих моментов в заданной расчетной схеме.

Матрица окончательных моментов определяется следующим образом:

$$\begin{aligned} (M_{ok}) &= (M_p) + (M_x) \cdot (X) = qa^2 \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ -0,25 \\ -6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2a & -a \\ a & 0 \\ 0,5a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{6}{7} qa \\ -\frac{9,5}{7} qa \end{pmatrix} = \\ &= qa^2 \begin{pmatrix} \frac{0,5}{7} \\ -\frac{1}{7} \\ \frac{1,25}{7} \\ -6 \end{pmatrix} = qa^2 \begin{pmatrix} \frac{0,5}{7} \\ -\frac{1}{7} \\ \frac{1,25}{7} \\ -\frac{6 \cdot 7}{7} \end{pmatrix} = \frac{qa^2}{7} \begin{pmatrix} 0,5 \\ -1 \\ 1,25 \\ -42 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Глобальная деформационная проверка проводится по формуле:

$$(M_{x\Sigma})^T \cdot [B] \cdot (M_{ok}) = \begin{pmatrix} a \\ a \\ 0,5a \\ 0 \end{pmatrix}^T \cdot \underline{\lambda}$$

Проверка выполняется.

Выполним восстановление эпюры изгибающих моментов в ЗРС по полученной матрице (M_{ok}) . Этую процедуру проводим с учетом следующих факторов:

- правило знаков, введенное схемой дискретизации;
- нулевые значения момента в сечениях 5, 6;
- равенство значений моментов в сечениях 2-3.

Из м.	Лист	№ докум.	Подп.	Дата

Лист

$$(M_{ok}) = \frac{qa^2}{7} \begin{vmatrix} 0,5 & 1 \\ -1 & 2 \\ -1 & 3 \\ 1,25 & 4 \\ 0 & 5 \\ 0 & 6 \\ -42 & 7 \end{vmatrix}$$

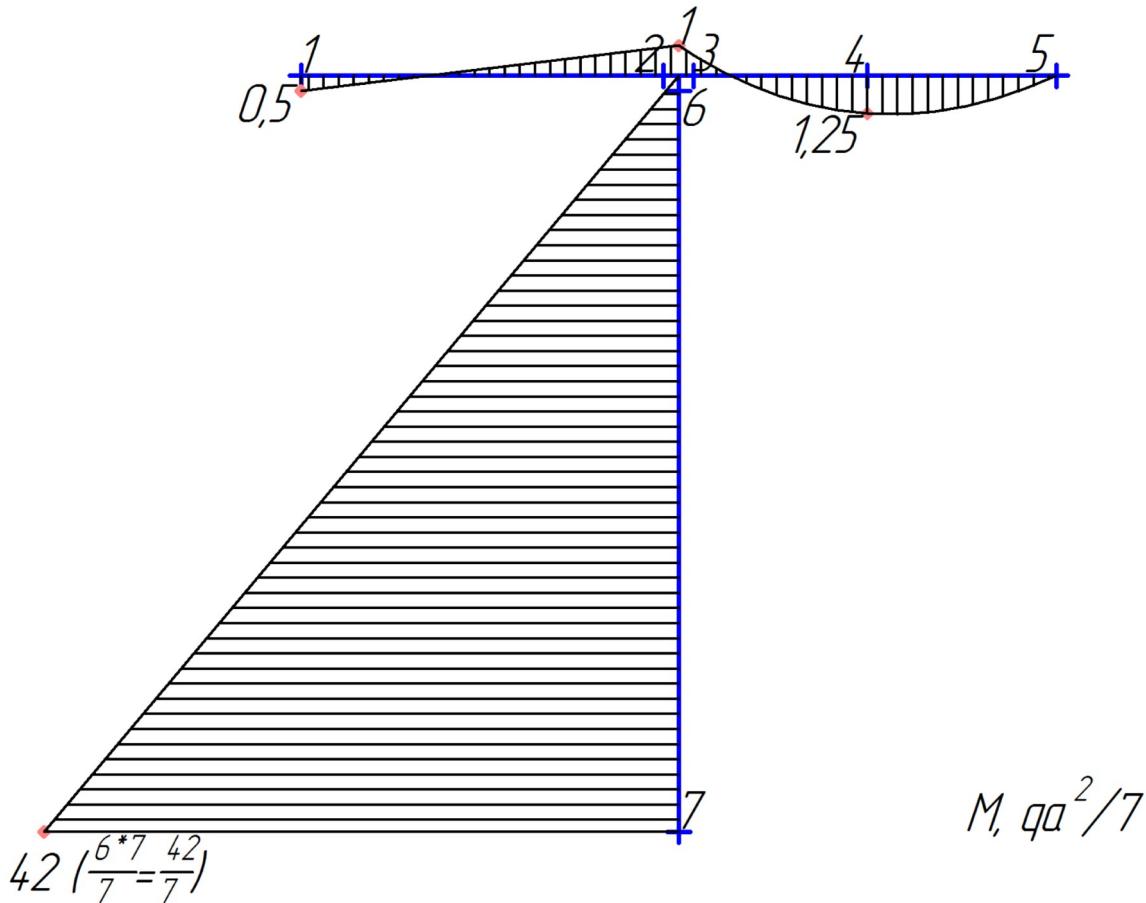


Рисунок 31

3. Построение эпюры Q методом дифференцирования эпюры M.

$$Q_{1-2} = \frac{(-1 - 0,5) \frac{qa^2}{7}}{a} = -\frac{1,5}{7} qa$$

$$Q_{3-5} = \frac{(0 - (-1)) \frac{qa^2}{7}}{a} + \frac{2q \cdot a}{2} = \frac{8}{7} qa$$

$$Q_{5-3} = \frac{(0 - (-1)) \frac{qa^2}{7}}{a} - \frac{2q \cdot a}{2} = -\frac{6}{7} qa$$

Из м.	Лист	№ докум.	Подп.	Дата

Лист

$$Q_{7-6} = \frac{(0 - (-42)) \frac{qa^2}{7}}{2a} = \frac{21}{7} qa = 3qa$$

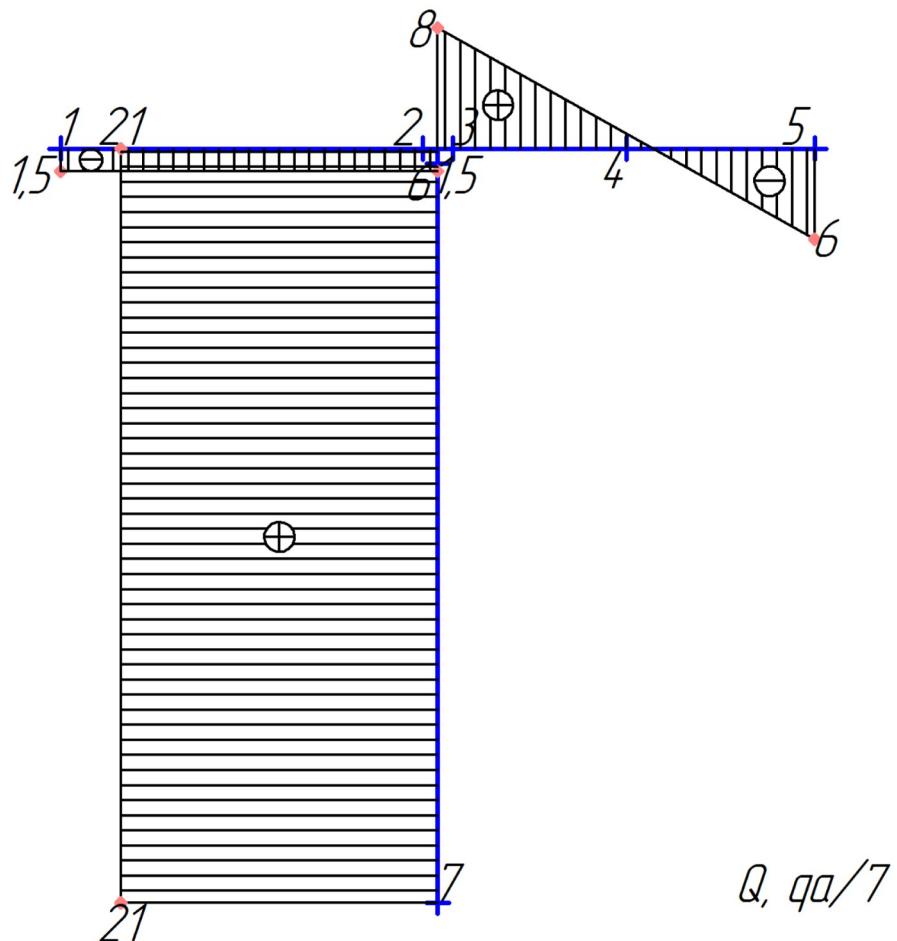


Рисунок 32

4. Построение эпюры N методом вырезания узлов.



Рисунок 33

$$\Sigma X = -N_{5-3} = 0$$

Из м.	Лист	№ докум.	Подп.	Дата

Лист

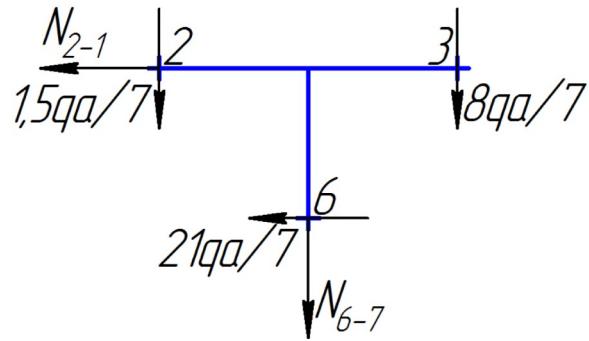


Рисунок 34

$$\Sigma X = -N_{2-1} - \frac{21}{7} qa = 0$$

$$N_{2-1} = -\frac{21}{7} qa$$

$$\Sigma Y = -\frac{1,5}{7} qa - N_{6-7} - \frac{8}{7} qa = 0$$

$$N_{6-7} = -\frac{1,5}{7} qa - \frac{8}{7} qa = -\frac{9,5}{7} qa$$

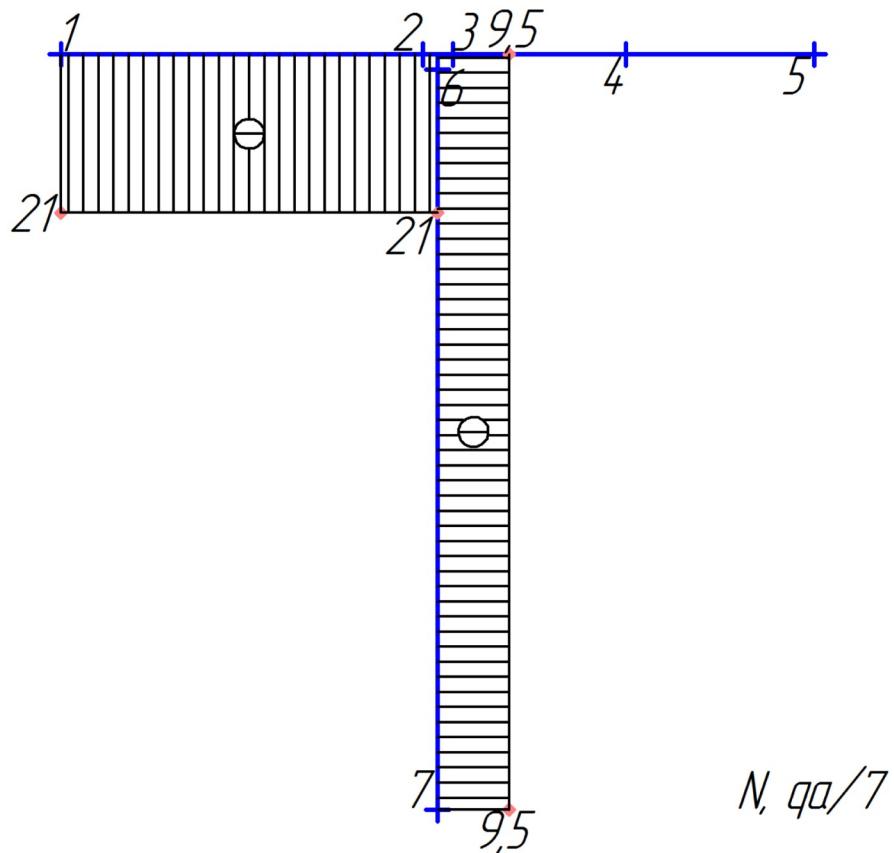


Рисунок 35

Из м.	Лист	№ докум.	Подп.	Дата

Лист

5. Определение реакций внешних связей в заданной расчетной схеме по построенным эпюрам усилий.

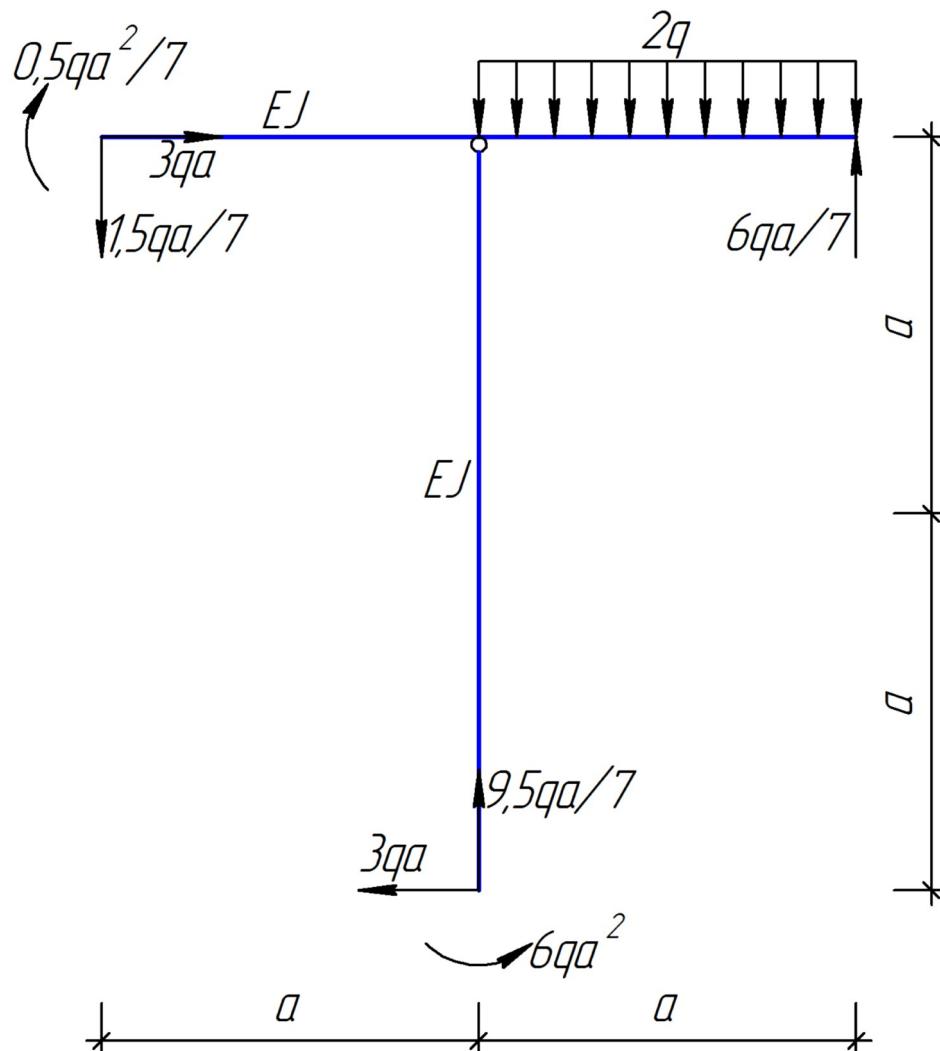


Рисунок 36

6. Проверка равновесия части заданной расчетной схемы с использованием найденных реакций лишних связей.

Для контроля равновесия произвольной части ЗРС выберем сечения, которые будут удовлетворять следующим требованиям:

- сечение не должно совпадать с контролируемым сечением на схеме дискретизации;
- сечение не должно проходить через узлы с дефектами;
- на отрезанной части должны присутствовать заданные нагрузки в максимально возможном количестве;

Из м.	Лист	№ докум.	Подп.	Дата

Лист

– усилия в сечениях должны назначаться по данным с построенных эпюор.

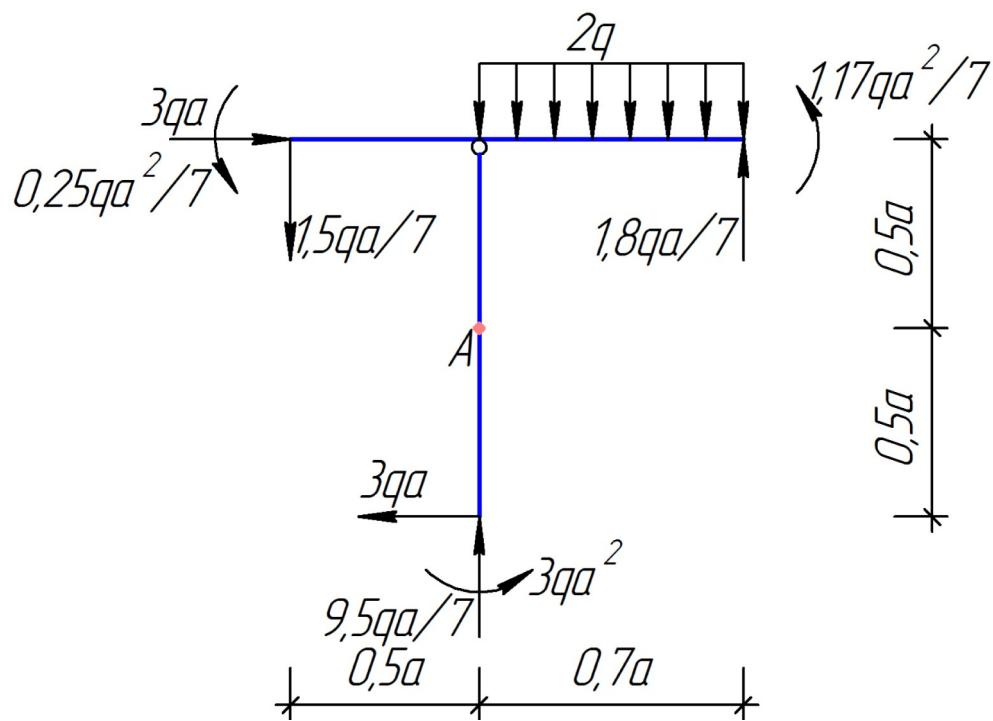


Рисунок 37

$$\Sigma X = 3qa - 3qa = 0$$

$$\Sigma Y = -\frac{1,5}{7}qa + \frac{9,5}{7}qa - 2q \cdot 0,7a + \frac{1,8}{7}qa = -\frac{11,3}{7}qa + \frac{11,3}{7}qa = 0$$

$$\begin{aligned}\Sigma mom_A &= \frac{0,25}{7}qa^2 - 3qa \cdot 0,5a + \frac{1,5}{7}qa \cdot 0,5a + 3qa^2 - 3qa \cdot 0,5a - \\ &- 2q \cdot 0,7a \cdot \frac{0,7a}{2} + \frac{1,17}{7}qa^2 + \frac{1,8}{7}qa \cdot 0,7a = 3,49qa^2 - 3,49qa^2 = 0\end{aligned}$$

Все условия выполнены. Задача решена верно.

Из м.	Лист	№ докум.	Подп.	Дата

Лист

Задача № 1.2. Расчет статически неопределенной рамы на прочность.

Метод перемещений

Для заданной расчетной схемы плоской рамы сложной структуры необходимо:

1. Провести кинематический анализ в следующем объеме:
 - 1.1. Доказать мгновенную неизменяемость заданной расчетной схемы.
 - 1.2. Установить степень кинематической неопределенности заданной расчетной схемы по угловым и линейным перемещениям.
2. Назначить основную систему метода перемещений.
3. Построить эпюры усилий в заданной расчетной схеме:
 - 3.1. От действия заданной статической нагрузки.
 - 3.2. От действия каждого из перемещений, запрещенных дополнительными связями, полагая его значение равным единичному.
4. Построить эпюру изгибающих моментов, используя алгоритм метода перемещений с вычислением элементов канонической системы уравнений через условия равновесия узлов с дополнительными связями.
5. Провести контроль правильности полученных результатов:
 - 5.1. Проверить равновесие части заданной расчетной схемы.
 - 5.2. Оценить погрешность полученных результатов.

Из	Лист	№ докум.	Подп.	Дата
----	------	----------	-------	------

Лист

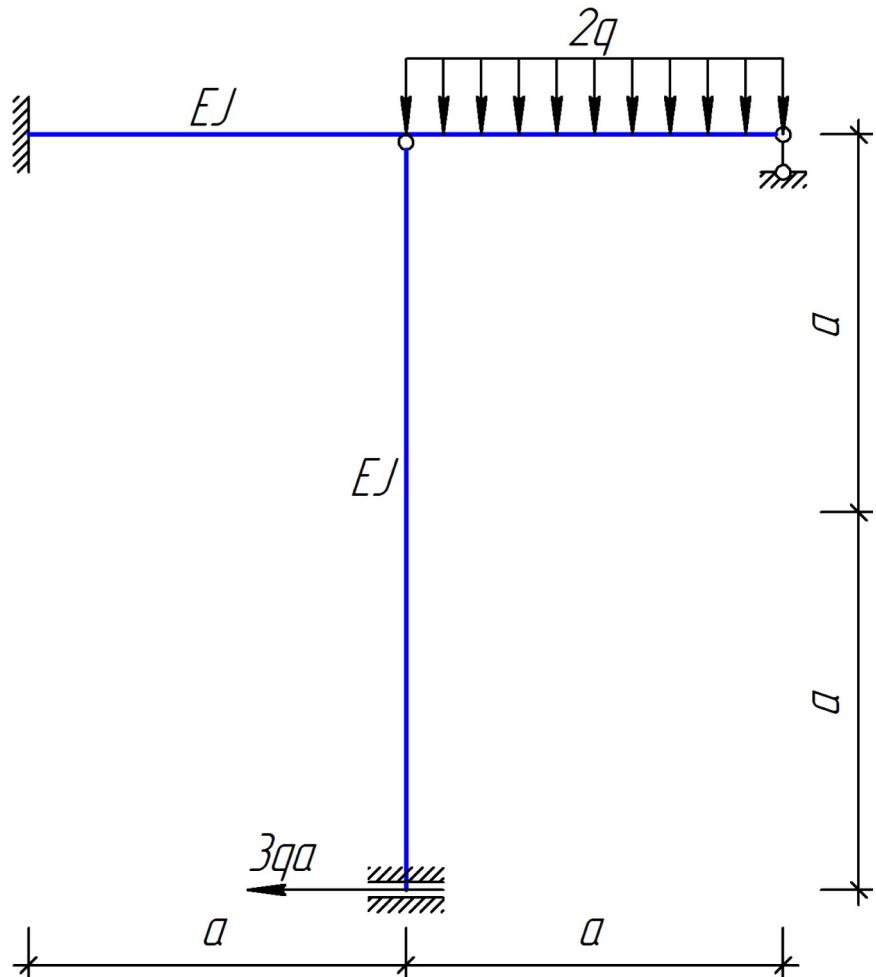


Рисунок 1

Решение.

1. Составим основную систему метода перемещений.

1.1. Определим степень кинематической неопределенности ЗРС, назначим систему дополнительных связей.

Назначение дополнительных связей проводится в два этапа:

Первый этап. Во все жесткие узлы ЗРС, кроме опорных вводятся связи, запрещающие передачу через эти узлы изгибающего момента (рисунок 2).

Из м.	Лист	№ докум.	Подп.	Дата

Лист

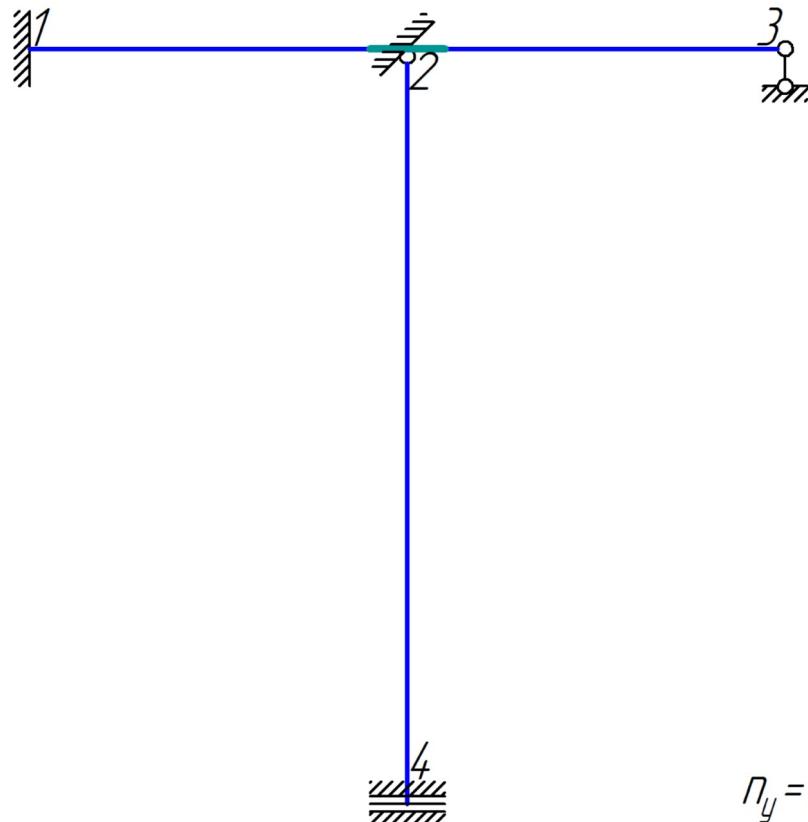


Рисунок 2

Второй этап. Выявляются линейные степени свободы, которые обеспечивают совместную работу балок за счет передачи поперечных сил:

– строится вспомогательная расчетная схема путем отбрасывания связей, запрещающих поворот во всех жестких узлах ЗРС, включая опорные (рисунок 3);

Из м.	Лист	№ докум.	Подп.	Дата

Лист

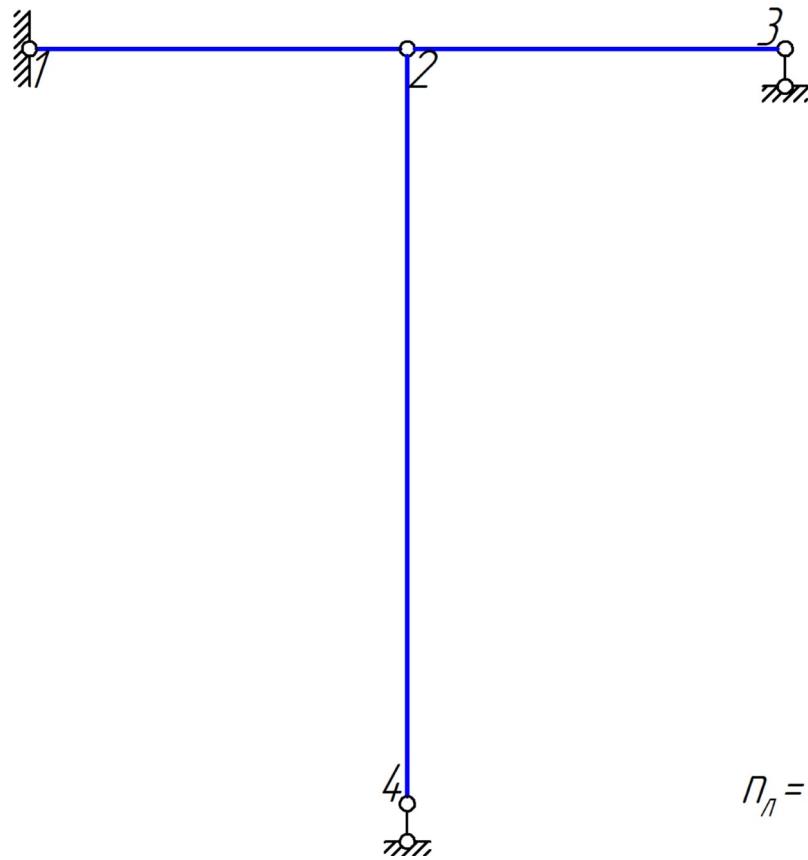


Рисунок 3

– для этой вспомогательной расчетной схемы определяют степень статической неопределенности системы:

$$W = 3D - 2\text{III} - C_O = 3 \cdot 3 - 2 \cdot 2 - 4 = 1$$

следовательно, для образования основной системы метода перемещений необходима одна линейная связь;

– выясняют, каким образом необходимо закрепить на плоскости ВРС, чтобы она стала геометрически неизменяемой; для этого каждый узел ВРС перемещают по горизонтали и по вертикали и устанавливают линейную связь в направлении возможного перемещения (рисунок 4);

Из	Лист	№ докум.	Подп.	Дата
M.				

Лист

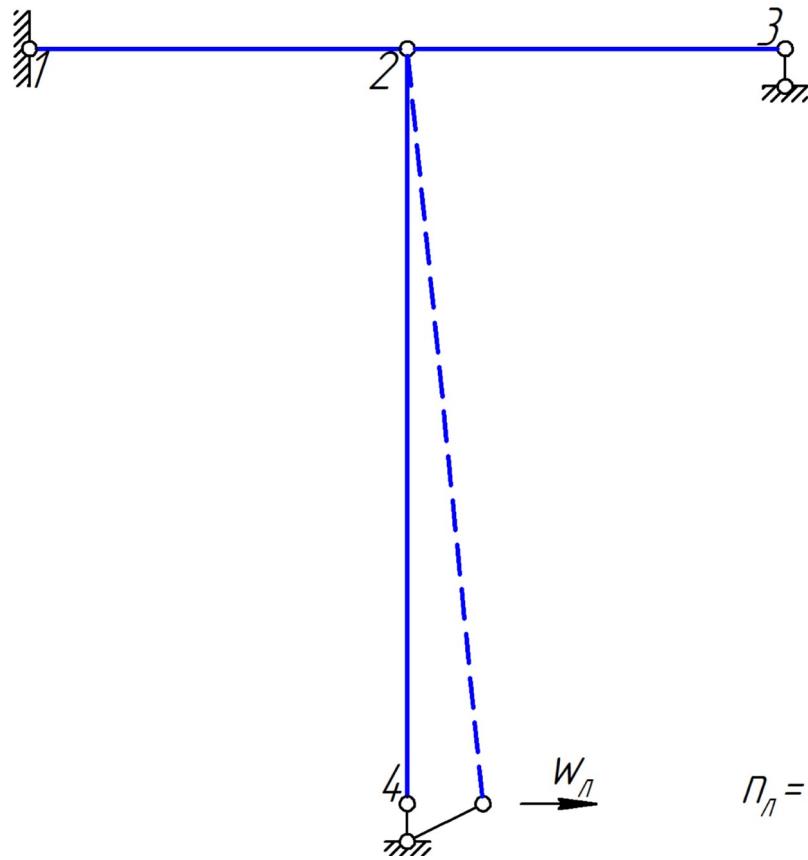
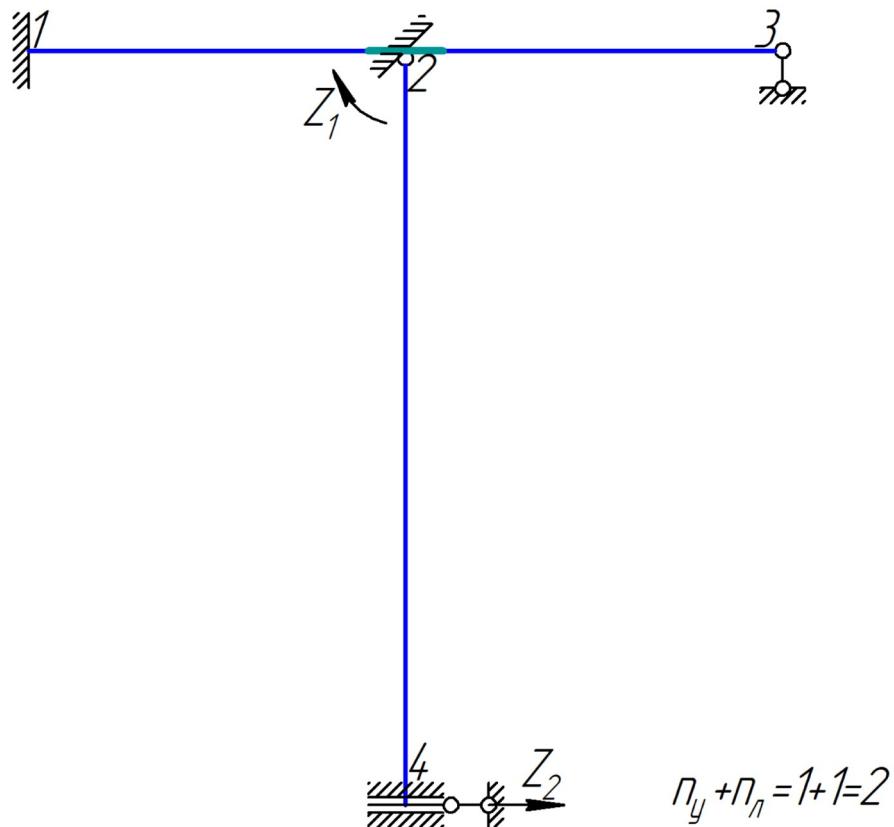


Рисунок 4

– в основной системе метода перемещений в направлении возможного линейного перемещения устанавливается линейная связь (рисунок 5).



Из м.	Лист	№ докум.	Подп.	Дата

Лист

Рисунок 5

1.2. Выбор основной системы метода перемещений.

ЗРС с введенными дополнительными связями образует основную систему метода перемещений (рисунок 5). Из данных рисунок 5 следует, что для создания ОСМП потребовалась одна угловая и одна линейная связи.

Следовательно, степень кинематической неопределенности ЗРС равна двум:

$$n = n_y + n_a = 1 + 1 = 2$$

1.3. Назначение заменяющей системы однопролетных балок.

Полученную ОСМП разбивают на однопролетные бесконсольные балки (рисунок 6).

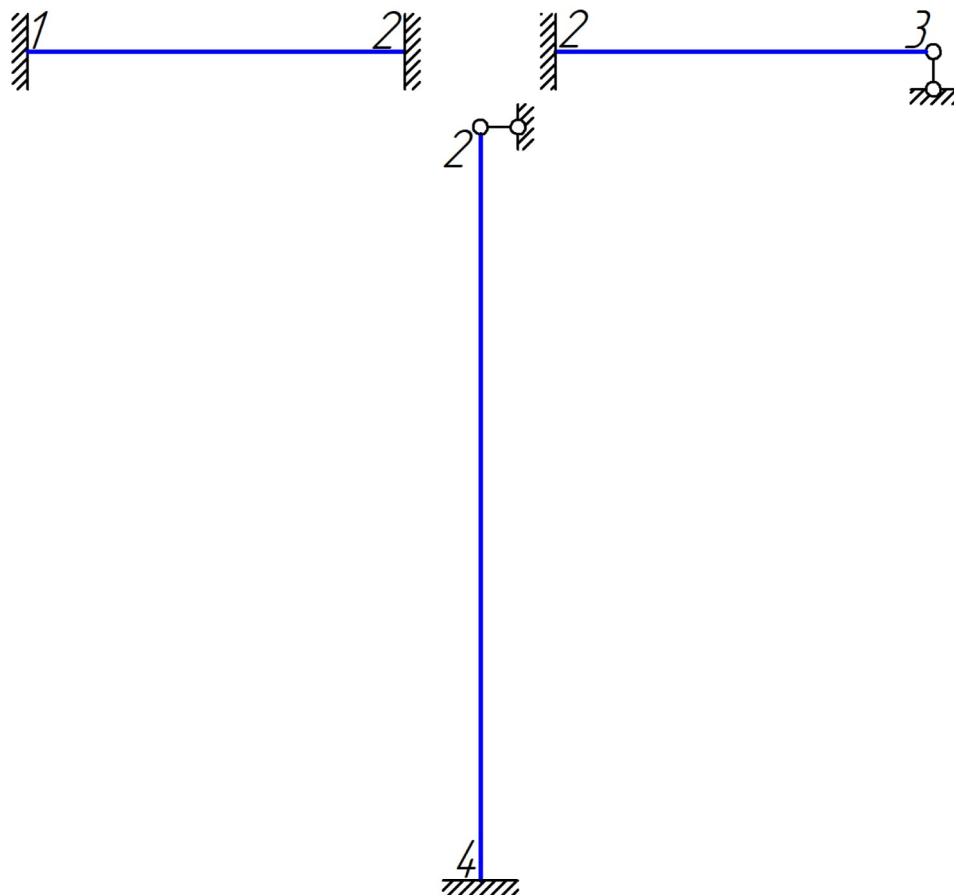


Рисунок 6

2. Построение эпюры изгибающих моментов от единичных перемещений и внешней заданной нагрузки с применением таблиц метода перемещений.

Из м.	Лист	№ докум.	Подп.	Дата

Лист

Применяя стандартные эпюры метода перемещений (см. справочные таблицы), построим и найдем числовые значения единичных эпюр в ОСМП.

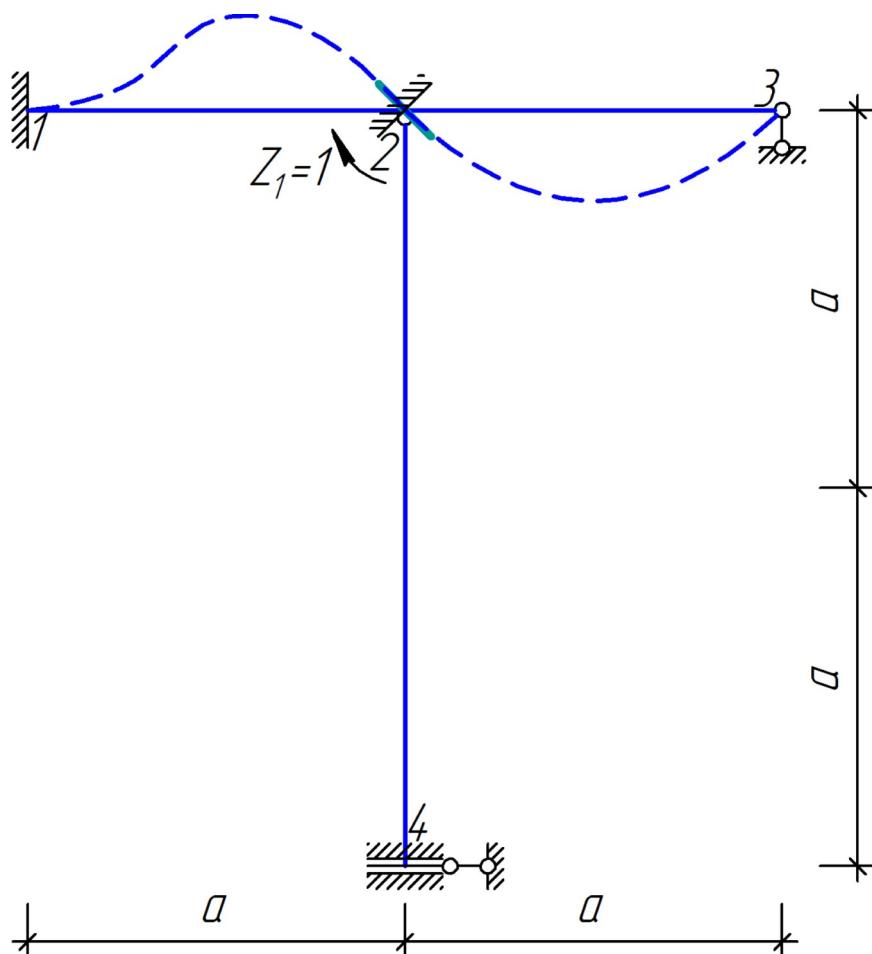


Рисунок 7

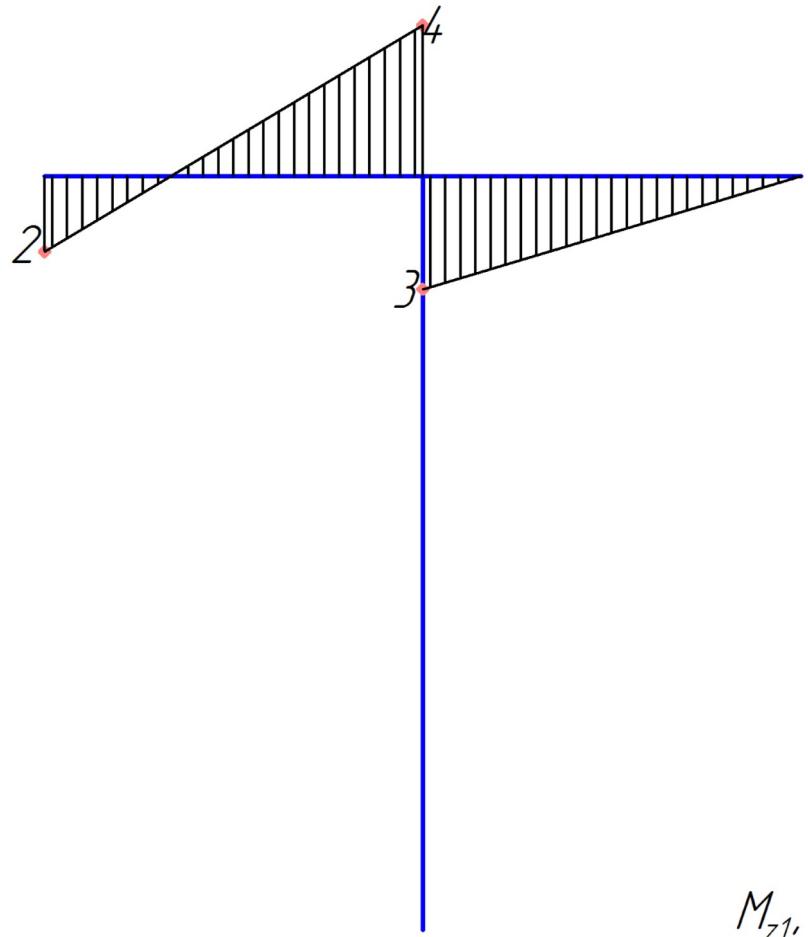
$$M_{1-2} = \frac{2 \cdot EJ}{a} = 2 \frac{EJ}{a}$$

$$M_{2-1} = \frac{4 \cdot EJ}{a} = 4 \frac{EJ}{a}$$

$$M_{2-3} = \frac{3 \cdot EJ}{a} = 3 \frac{EJ}{a}$$

Из м.	Лист	№ докум.	Подп.	Дата

Лист



$$M_{z1}, \frac{EI}{a}$$

Рисунок 8

Из м.	Лист	№ докум.	Подп.	Дата

Лист

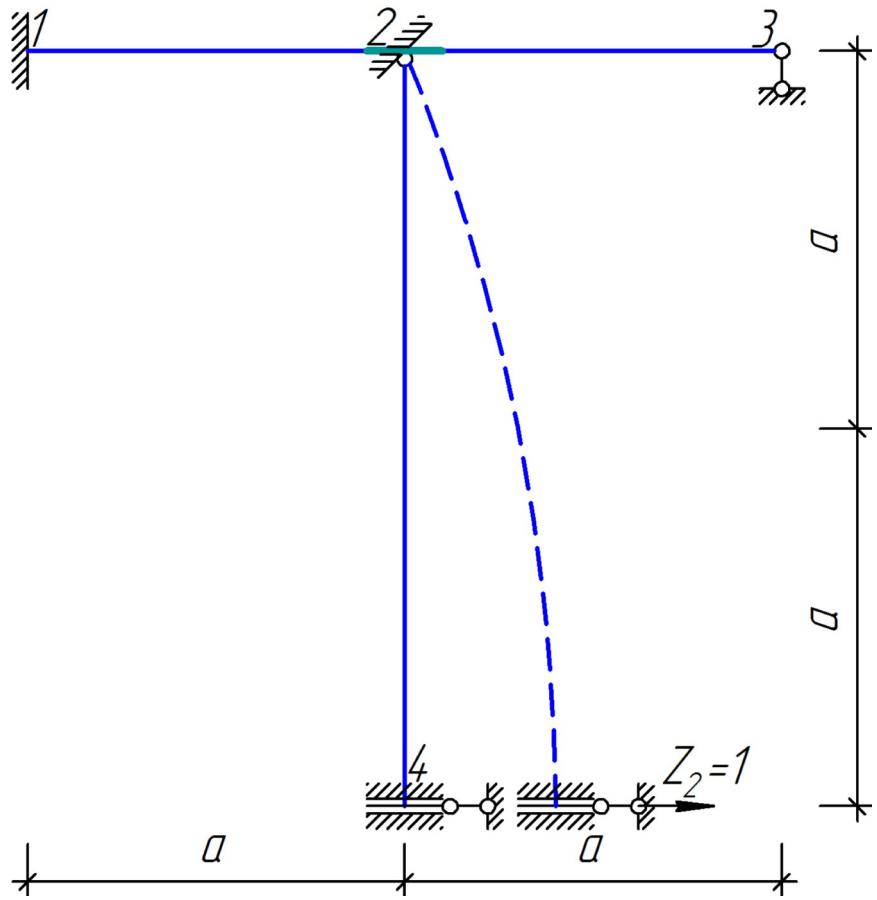


Рисунок 9

$$M_{4-2} = \frac{3 \cdot EJ}{(2a)^2} = 0,75 \frac{EJ}{a^2}$$

$$Q_{4-2} = \frac{0,75 \cdot EJ}{a^2 \cdot 2a} = 0,375 \frac{EJ}{a^3}$$

Из м.	Лист	№ докум.	Подп.	Дата

Лист

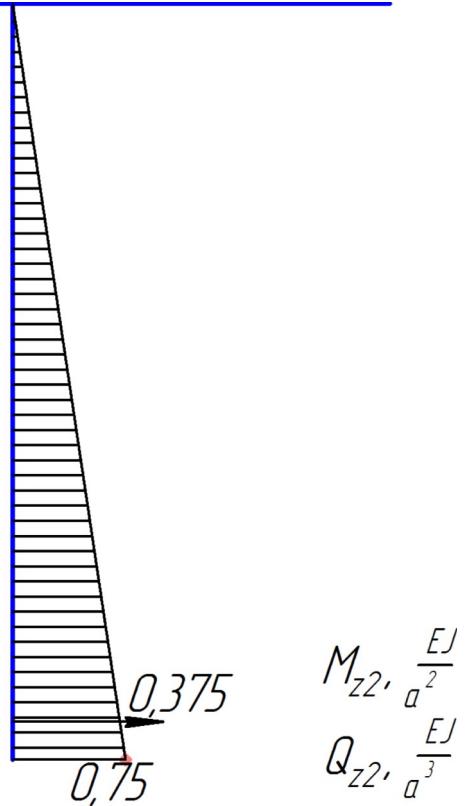


Рисунок 10

Применяя стандартные эпюры метода перемещений (см. справочные таблицы), построим и найдем числовые значения грузовой эпюры в ОСМП.

Из м.	Лист	№ докум.	Подп.	Дата

Лист

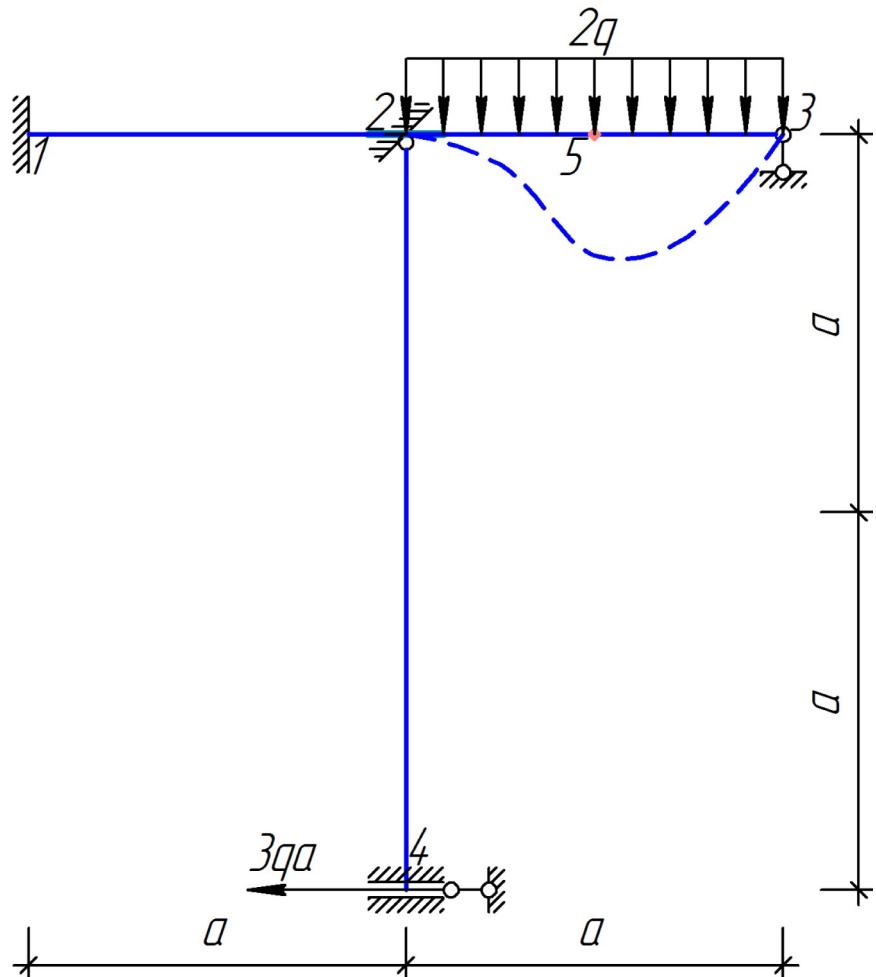


Рисунок 11

$$M_{2-3} = \frac{2q \cdot a^2}{8} = 0,25 q a^2$$

$$M_{5-3} = \frac{2q \cdot a^2}{16} = 0,125 q a^2$$

Из м.	Лист	№ докум.	Подп.	Дата

Лист

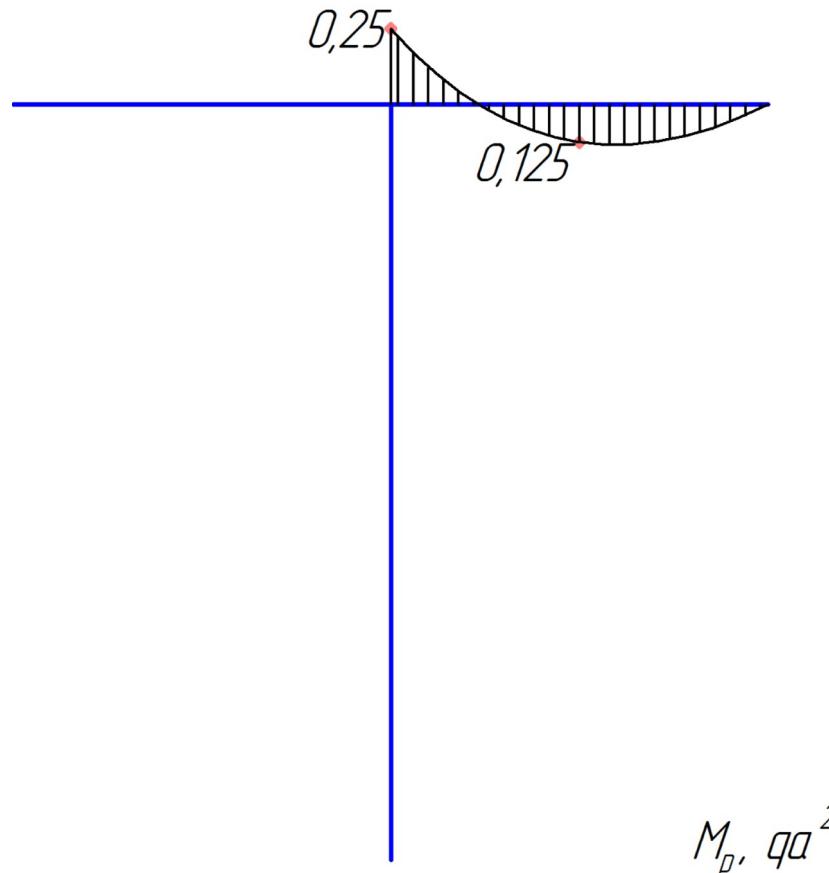


Рисунок 12

3. Формирование и решение канонической системы уравнений.

3.1. Определение коэффициентов и свободных членов канонической системы уравнений метода перемещений.

Каноническая система уравнений метода перемещений записывается следующим образом:

$$[r][Z] + [R] = [0]$$

где $[r]$ – матрица коэффициентов при неизвестных;

$[Z]$ – вектор неизвестных перемещений;

$[R]$ – вектор свободных коэффициентов.

Для данной задачи КСУ МП имеет следующий развернутый вид:

$$\begin{cases} r_{11}Z_1 + r_{12}Z_2 + R_1 = 0 \\ r_{21}Z_1 + r_{22}Z_2 + R_2 = 0 \end{cases}$$

Из м.	Лист	№ докум.	Подп.	Дата

Лист

Коэффициенты первого уравнения представляют собой реактивные моменты, которые находят из условия равновесия узла №2 с соответствующих эпюор изгибающих моментов:

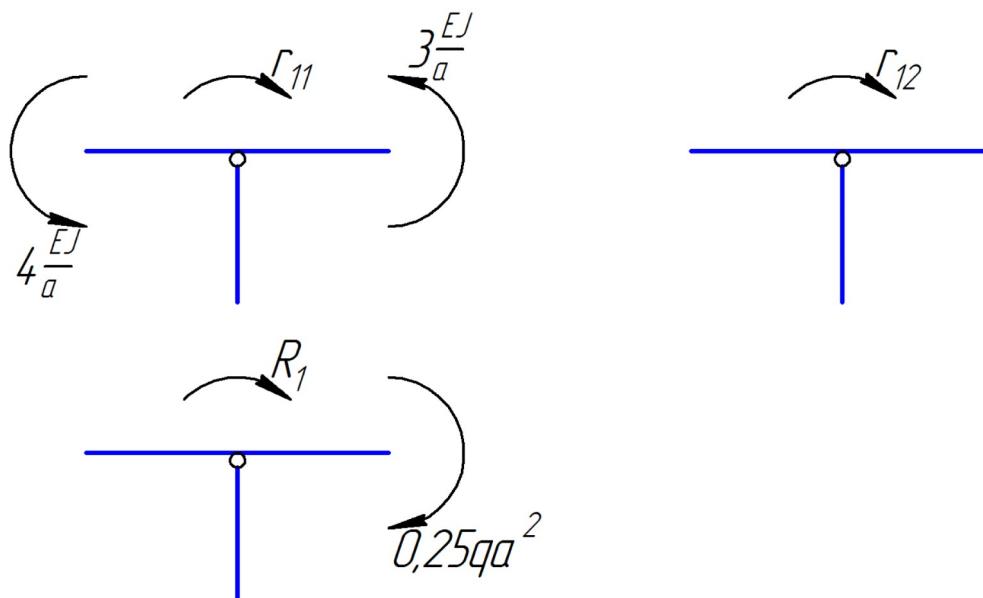


Рисунок 13

$$r_{11} = 3 \frac{EJ}{a} + 4 \frac{EJ}{a} = 7 \frac{EJ}{a}$$

$$r_{12} = 0$$

$$R_1 = -0,25 q a^2$$

Коэффициенты второго уравнения представляют собой реактивные силы, которые находят из условия равновесия узла 4 с соответствующих эпюор поперечных сил:

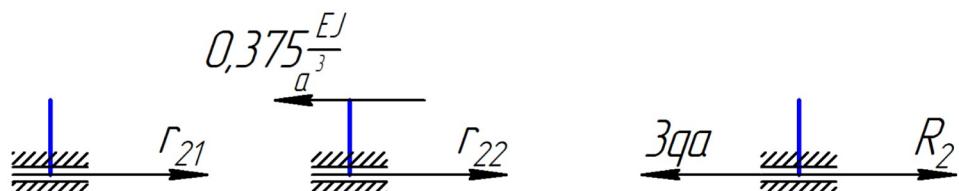


Рисунок 14

$$r_{21} = 0$$

$$r_{22} = 0,375 \frac{EJ}{a^3}$$

$$R_2 = 3 qa$$

Из м.	Лист	№ докум.	Подп.	Дата

Лист

3.2. Приведение канонической системы уравнений метода перемещений к виду, удобному для решения.

$$\begin{cases} 7 \frac{EJ}{a} \cdot Z_1 + 0 \cdot Z_2 - 0,25 q a^2 = 0 \\ 0 \cdot Z_1 + 0,375 \frac{EJ}{a^3} \cdot Z_2 + 3 q a = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 7 \cdot Z_1 - \frac{0,25 q a^3}{EJ} = 0 \\ 0,375 \cdot Z_2 + \frac{3 q a^4}{EJ} = 0 \end{cases}$$

Решая данную СЛАУ, получаем следующий результат:

$$Z_1 = \frac{0,25 q a^3}{7 EJ}$$

$$Z_2 = -\frac{3 q a^4}{0,375 EJ} = -\frac{8 q a^4}{EJ}$$

4. Построение окончательной эпюры изгибающих моментов и сравнение ее с эпюрой, полученной по методу сил

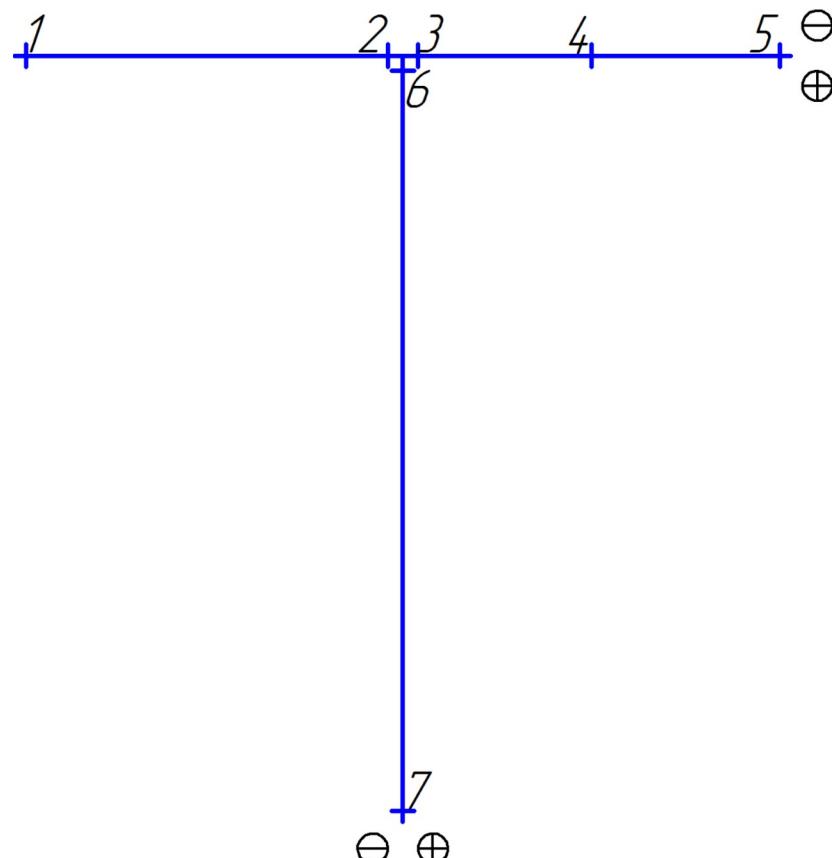


Рисунок 15

Из м.	Лист	№ докум.	Подп.	Дата

Лист

$$M_1 = 2 \frac{EJ}{a} \cdot \frac{0,25qa^3}{7EJ} + 0 \cdot \left(-\frac{8qa^4}{EJ} \right) + 0 = \frac{0,5}{7} qa^2$$

$$M_2 = -4 \frac{EJ}{a} \cdot \frac{0,25qa^3}{7EJ} + 0 \cdot \left(-\frac{8qa^4}{EJ} \right) + 0 = -\frac{1}{7} qa^2$$

$$M_3 = 3 \frac{EJ}{a} \cdot \frac{0,25qa^3}{7EJ} + 0 \cdot \left(-\frac{8qa^4}{EJ} \right) - 0,25qa^2 = -\frac{1}{7} qa^2$$

$$M_4 = 1,5 \frac{EJ}{a} \cdot \frac{0,25qa^3}{7EJ} + 0 \cdot \left(-\frac{8qa^4}{EJ} \right) + 0,125qa^2 = \frac{1,25}{7} qa^2$$

$$M_5 = 0 \cdot \frac{0,25qa^3}{7EJ} + 0 \cdot \left(-\frac{8qa^4}{EJ} \right) + 0 = 0$$

$$M_6 = 0 \cdot \frac{0,25qa^3}{7EJ} + 0 \cdot \left(-\frac{8qa^4}{EJ} \right) + 0 = 0$$

$$M_7 = 0 \cdot \frac{0,25qa^3}{7EJ} + 0,75 \frac{EJ}{a^2} \cdot \left(-\frac{8qa^4}{EJ} \right) + 0 = -6qa^2 = -\frac{6 \cdot 7}{7} qa^2 = -\frac{42}{7} qa^2$$

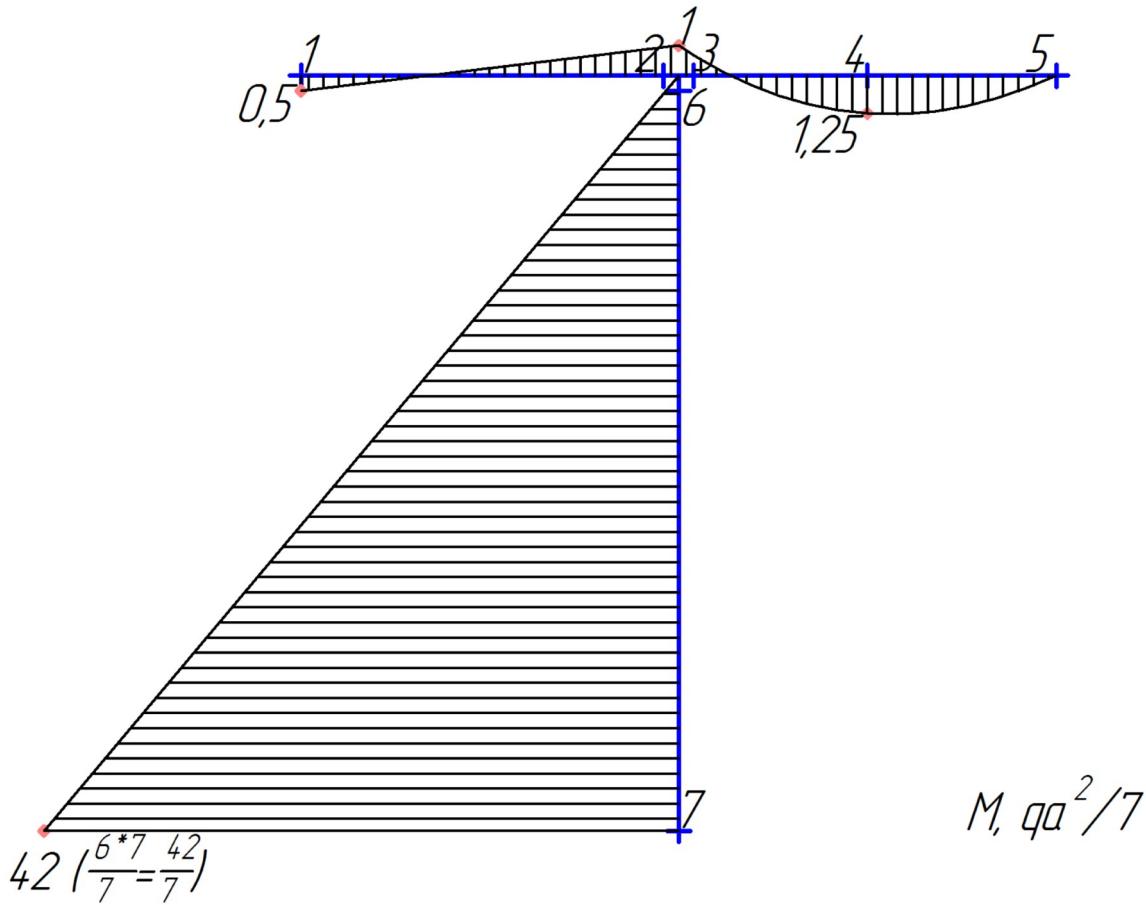


Рисунок 16

Вывод: конечная эпюра изгибающих моментов по методу перемещений совпадает с конечной эпюрой, полученной при решении этой же задачи

Из м.	Лист	№ докум.	Подп.	Дата

Лист

методом сил. Числовые значения расходятся в узлах менее чем на 5 %, что допустимо условием задачи.

5. Построение эпюры Q методом дифференцирования эпюры M.

$$Q_{1-2} = \frac{(-1 - 0,5) \frac{qa^2}{7}}{a} = -\frac{1,5}{7} qa$$

$$Q_{3-5} = \frac{(0 - (-1)) \frac{qa^2}{7}}{a} + \frac{2q \cdot a}{2} = \frac{8}{7} qa$$

$$Q_{5-3} = \frac{(0 - (-1)) \frac{qa^2}{7}}{a} - \frac{2q \cdot a}{2} = -\frac{6}{7} qa$$

$$Q_{7-6} = \frac{(0 - (-42)) \frac{qa^2}{7}}{2a} = \frac{21}{7} qa = 3 qa$$

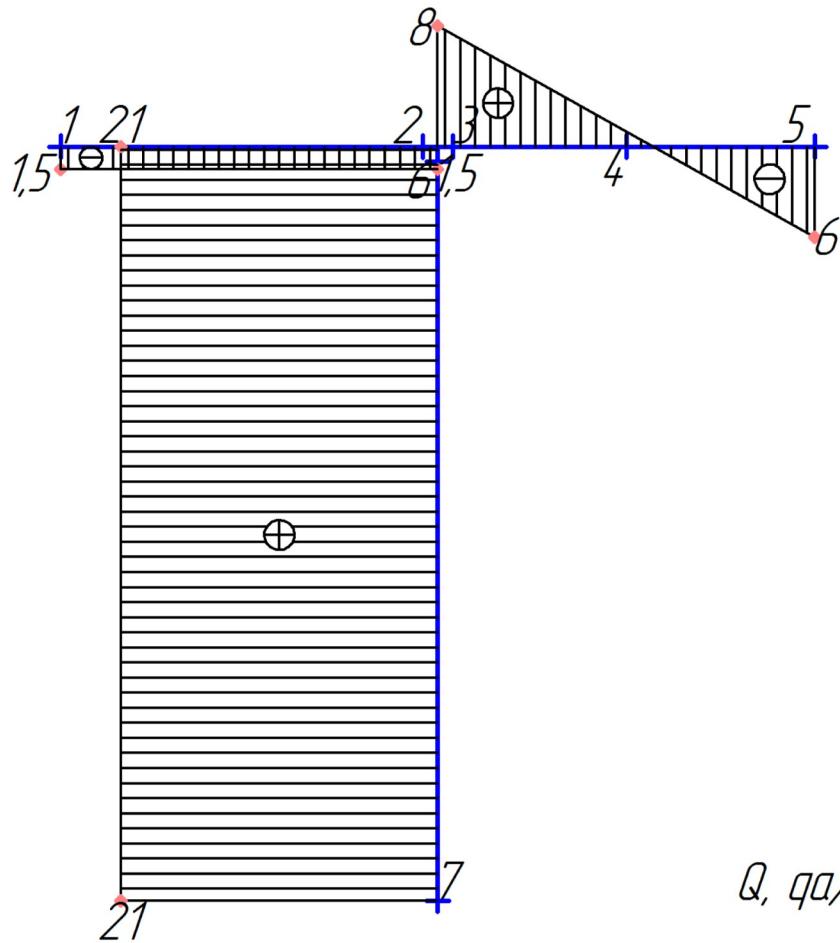


Рисунок 17

6. Построение эпюры N методом вырезания узлов.

Из м.	Лист	№ докум.	Подп.	Дата

Лист

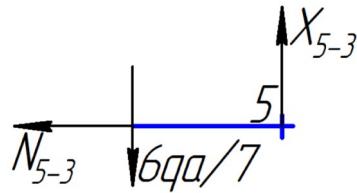


Рисунок 18

$$\Sigma X = -N_{5-3} = 0$$

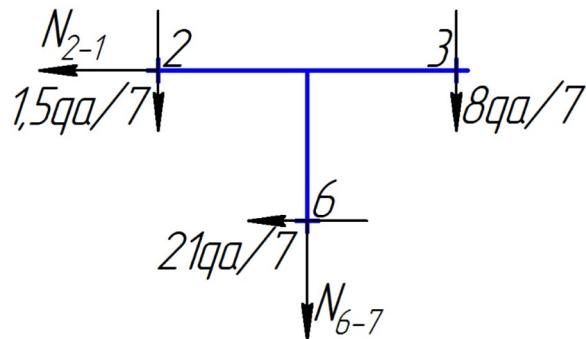


Рисунок 19

$$\Sigma X = -N_{2-1} - \frac{21}{7} qa = 0$$

$$N_{2-1} = -\frac{21}{7} qa$$

$$\Sigma Y = -\frac{1,5}{7} qa - N_{6-7} - \frac{8}{7} qa = 0$$

$$N_{6-7} = -\frac{1,5}{7} qa - \frac{8}{7} qa = -\frac{9,5}{7} qa$$

Лист

Из м.	Лист	№ докум.	Подп.	Дата

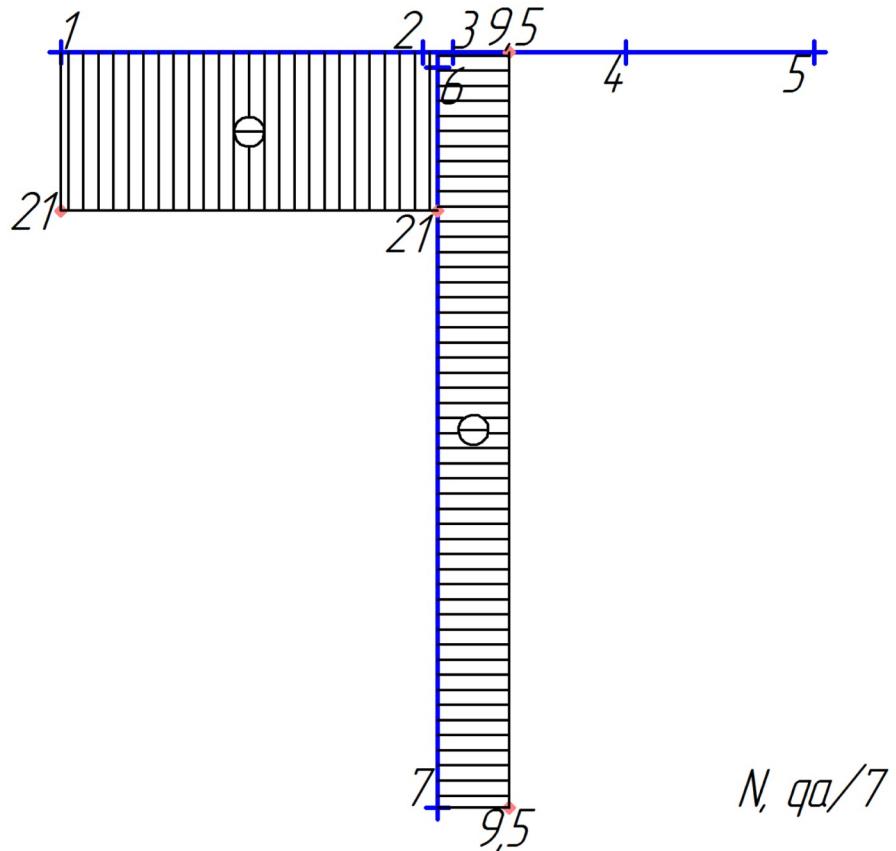


Рисунок 20

7. Определение реакций внешних связей в заданной расчетной схеме по построенным эпюрам усилий.

Из м.	Лист	№ докум.	Подп.	Дата

Лист

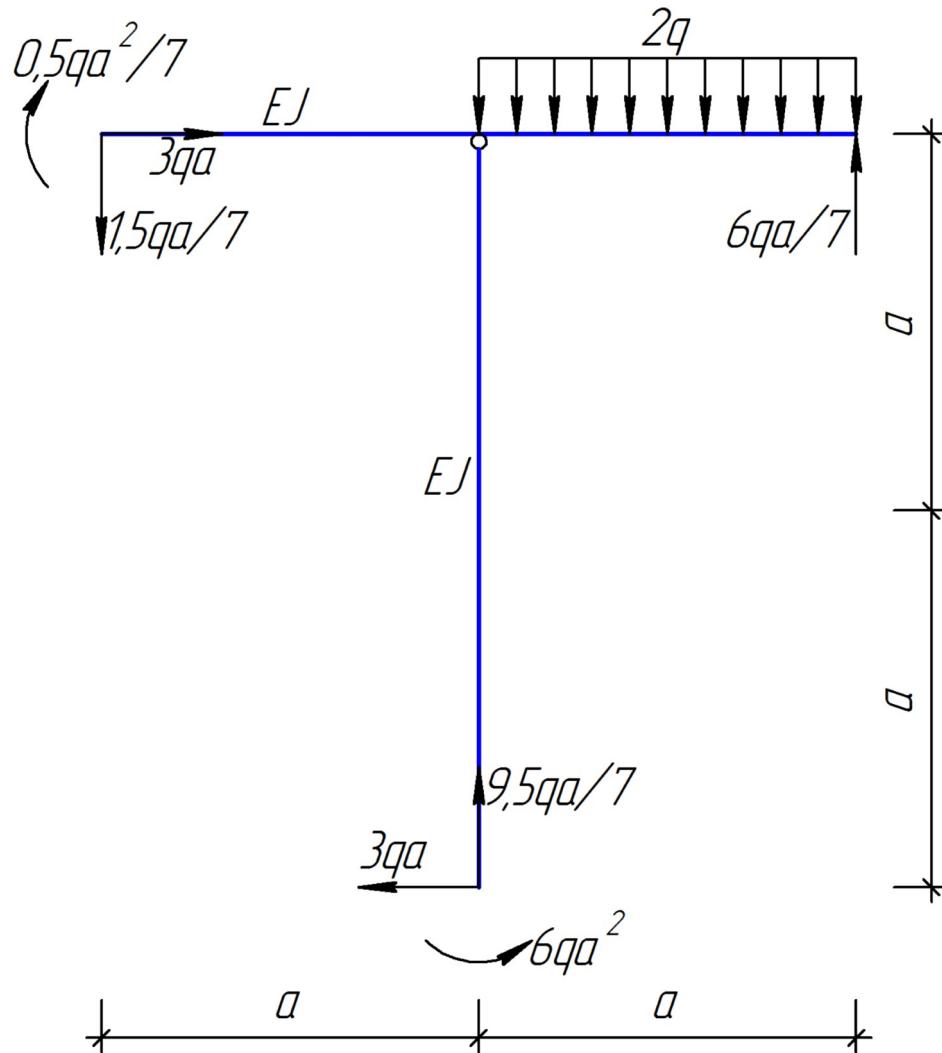


Рисунок 21

8. Проверка равновесия части заданной расчетной схемы с использованием найденных реакций лишних связей.

Для контроля равновесия произвольной части ЗРС выберем сечения, которые будут удовлетворять следующим требованиям:

- сечение не должно совпадать с контролируемым сечением на схеме дискретизации;
- сечение не должно проходить через узлы с дефектами;
- на отрезанной части должны присутствовать заданные нагрузки в максимально возможном количестве;
- усилия в сечениях должны назначаться по данным с построенных эпюор.

Из м.	Лист	№ докум.	Подп.	Дата

Лист

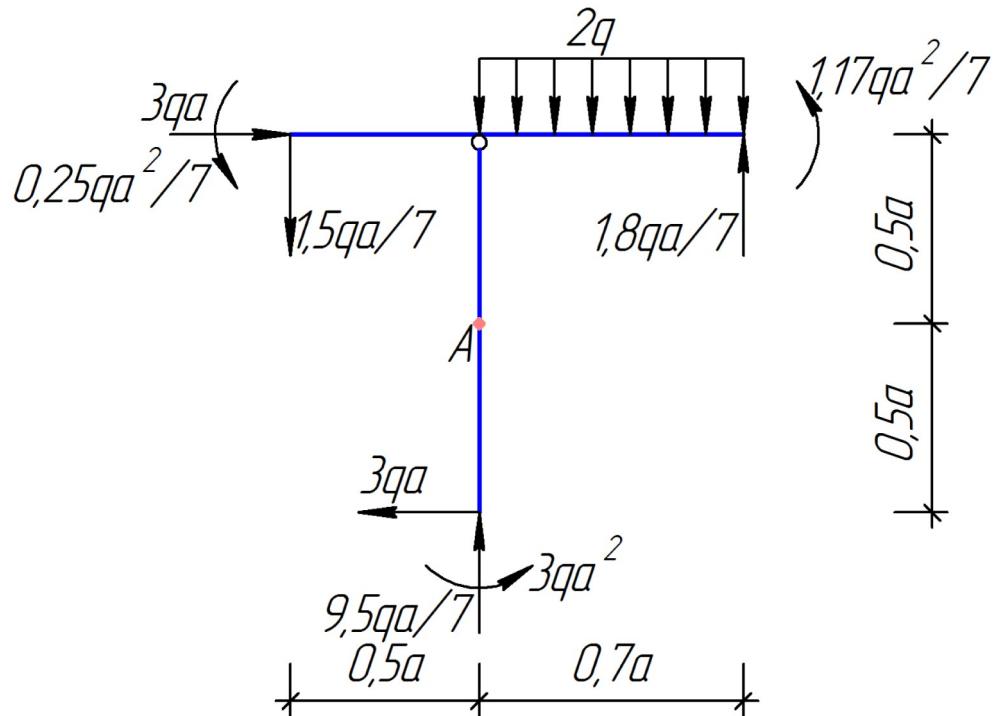


Рисунок 22

$$\Sigma X = 3qa - 3qa = 0$$

$$\Sigma Y = -\frac{1,5}{7}qa + \frac{9,5}{7}qa - 2q \cdot 0,7a + \frac{1,8}{7}qa = -\frac{11,3}{7}qa + \frac{11,3}{7}qa = 0$$

$$\begin{aligned}\Sigma mom_A &= \frac{0,25}{7}qa^2 - 3qa \cdot 0,5a + \frac{1,5}{7}qa \cdot 0,5a + 3qa^2 - 3qa \cdot 0,5a - \\ &- 2q \cdot 0,7a \cdot \frac{0,7a}{2} + \frac{1,17}{7}qa^2 + \frac{1,8}{7}qa \cdot 0,7a = 3,49qa^2 - 3,49qa^2 = 0\end{aligned}$$

Все условия выполнены. Задача решена верно.

Из м.	Лист	№ докум.	Подп.	Дата

Лист