Задача № 1. Прямой стержень жестко заделан левым концом и нагружен сосредоточенными силами (рис.1). Требуется:

– изобразить расчетную схему стержня;

– найти реакцию опоры (заделки);

– построить эпюры продольной силы N и нормальных напряжений σ;

– из условия прочности определить площадь A поперечного сечения стержня;

– найти удлинения (укорочения) участков стержня $\Delta l_i$ и полное изменение длины стержня Δl.

– определить относительные продольные деформации εzi на участках стержня и проверить выполнение условия жесткости.

При расчете принять $E = 2 \cdot 10^5$ МПа, $[\varepsilon z]=1 \cdot 10^{-3}$

Исходные данные: a = 0,6м, b = 0,3м, c = 0,9м, $F_1$ = 25кН, $F_2$ = 15кН, $F_3$ = =36кН, R = 130Мпа

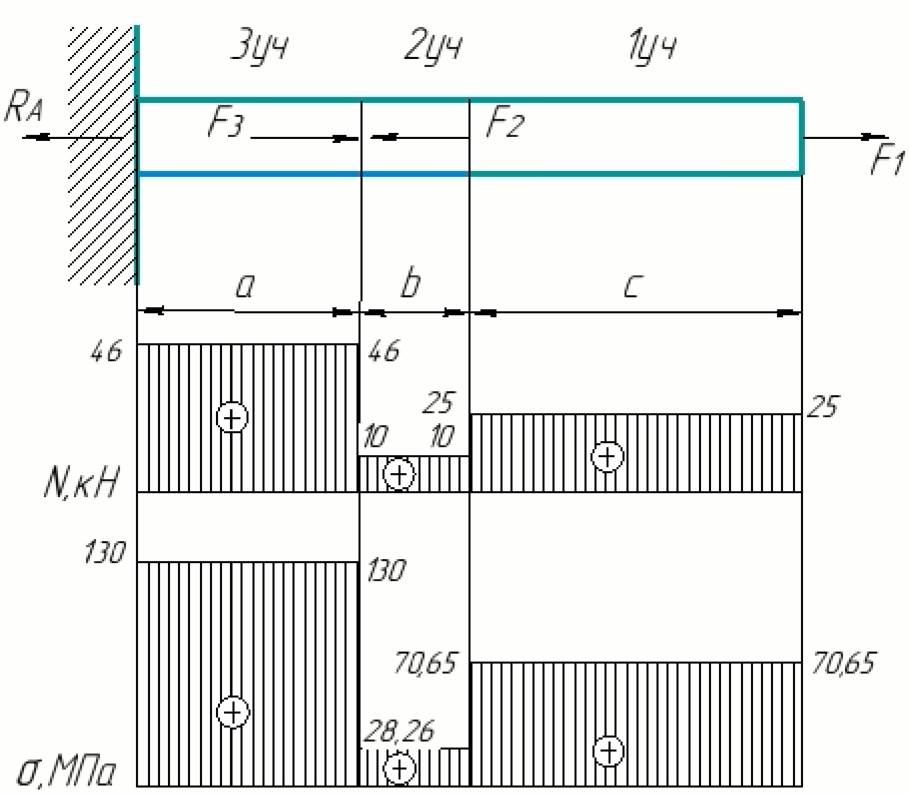



Рисунок 1

Решение

1. Вычерчиваем расчетную схему стержня

2. Определим реакцию опоры

$$\sum F_x = 0; \ -R_A + F_1 - F_2 + F_3 = 0$$

$$R_A = F_1 - F_2 + F_3 = 46\,кН$$

3.Брус разбиваем на 3 участка, где границами участков нагружения являются сечения бруса, в которых происходит скачкообразное изменение площади поперечного сечения, а также сечения, к которым приложены внешние силы.

Примем метод сечений. Рассечем брус на 3 участков нагружения. Рассмотрим мысленно правую отсеченную часть бруса 1уч (рис 1.2а). Неизвестную продольную силу N будем всегда направлять влево.

Определим продольную силу на участках:

1уч: $N_1 = F_1 = 25\,кН$

2уч: $N_2 = F_1 - F_2 = 25 - 15 = 10\,кН$

3уч: $N_3 = F_1 - F_2 + F_3 = 25 - 15 + 36 = 46\,кН$

4.Для определения нормальных напряжений необходимо знать площадь сечений.

Условие прочности:

$$|\sigma_{max}| = \frac{|N_{max}|}{A} \leq R$$

Определим площадь поперечного сечения

$$A \geq \frac{|N_{max}|}{R} = \frac{46 \cdot 10^3}{130 \cdot 10^6} = 353{,}85 \cdot 10^{-6}\, м^2 = 353{,}85\, мм^2$$

5.Определим нормальное напряжение

$$1\,уч.\ \ \sigma_1 = \frac{N_1}{A} = \frac{25 \cdot 10^3}{353{,}85} = 70{,}65\,МПа$$

$$2\,уч.\ \ \sigma_2 = \frac{N_2}{A} = \frac{10 \cdot 10^3}{353{,}85} = 28{,}26\,МПа$$

$$3\,уч.\ \ \sigma_3 = \frac{N_3}{A} = \frac{46 \cdot 10^3}{353{,}85} = 130\,МПа$$

6. Определим изменение длины каждого участка (удлинение или укорочение):

$$\Delta l_1 = \frac{N_1 \cdot c}{E \cdot A} = \frac{25 \cdot 10^3 \cdot 0{,}9 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^5 \cdot 353{,}85} = 0{,}32\ мм$$

$$\Delta l_2 = \frac{N_2 \cdot b}{E \cdot A} = \frac{10 \cdot 10^3 \cdot 0{,}3 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^5 \cdot 353{,}85} = 0{,}04\ мм$$

$$\Delta l_3 = \frac{N_3 \cdot a}{E \cdot A} = \frac{46 \cdot 10^3 \cdot 0{,}6 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^5 \cdot 353{,}85} = 0{,}39\ мм$$

7.Определим перемещение всего бруса:

$$\Delta l = \Delta l_1 + \Delta l_2 + \Delta l_3 = 0{,}32 + 0{,}04 + 0{,}39 = 0{,}75\ мм$$

8. Определить на участках стержня относительную продольную деформацию и проверим на прочность:

Условие жесткости:

$$\varepsilon_{zi} \le [\varepsilon_z]$$

$$1\ уч. \quad \varepsilon_{z1} = \frac{\sigma_1}{E} = \frac{70{,}65}{2 \cdot 10^5} = 0{,}35 \cdot 10^{-3} \le 1 \cdot 10^{-3} = [\varepsilon_z]$$

$$2\ уч. \quad \varepsilon_{z2} = \frac{\sigma_2}{E} = \frac{28{,}26}{2 \cdot 10^5} = 0{,}14 \cdot 10^{-3} \le 1 \cdot 10^{-3} = [\varepsilon_z]$$

$$3\ уч. \quad \varepsilon_{z3} = \frac{\sigma_3}{E} = \frac{130}{2 \cdot 10^5} = 0{,}65 \cdot 10^{-3} \le 1 \cdot 10^{-3} = [\varepsilon_z]$$

На каждом участке выполняется условие жесткости.

Ответ: $R_A$= 46кН, $N_1$= 25кН, $N_2$= 10кН, $N_1$= 46кН, $\sigma_1$= 70,65Мпа, $\sigma_2$= 28,26Мпа, $\sigma_3$ = 130Мпа, $\Delta l_1$ = 0,32мм, $\Delta l_2$ = 0,04мм, $\Delta l_3$ = 0,39мм, $\Delta l$ = 0,75мм, $\varepsilon_{z1}$ = $0{,}35 \cdot 10^{-3}$, $\varepsilon_{z2}$ = $0{,}14 \cdot 10^{-3}$, $\varepsilon_{z3}$ = $0{,}65 \cdot 10^{-3}$.

**Задача № 2**. Для заданного стержня (рис. 2) требуется:

– изобразить расчетную схему стержня;

– построить эпюру продольной силы N;

– построить эпюру нормального напряжения σ в общем виде и определить положение опасного сечения.

– из условия прочности определить площадь поперечного сечения стержня А.

– определить нормальные напряжения σi на участках стержня и построить эпюру нормального напряжения с указанием ординат эпюры в численном виде, сделать вывод о правильности определения площади А.

Исходные данные: а = 0,34м, $F_1$ = 25кН, $F_2$ = 15кН, q = 4кН/м, R = =110Мпа

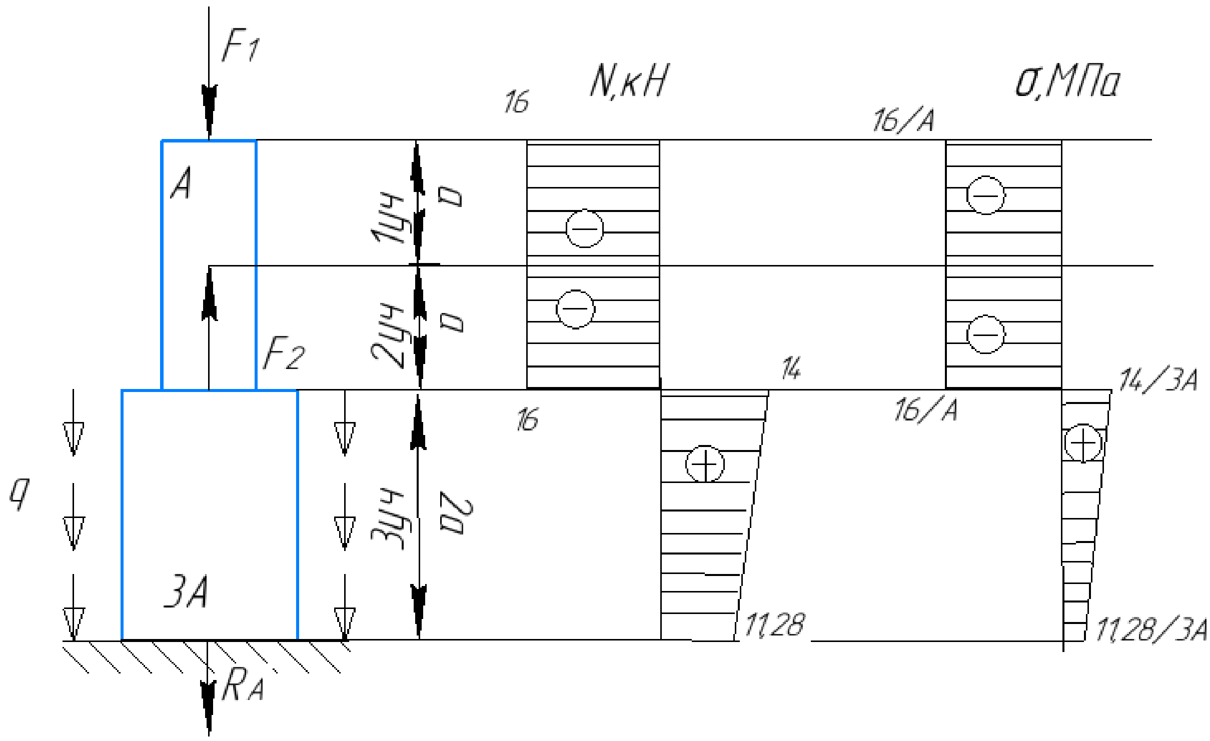



Рисунок 2

Решение

1. Вычерчиваем расчетную схему стержня

2.Определим реакцию опоры

$$\sum F_x = 0;\ -\ R_A - F_1 + F_2 - q\cdot 2\cdot 0{,}34 = 0$$

$$R_A = -F_1 + F_2 - q\cdot 2\cdot 0{,}34 = -16 + 30 - 4\cdot 2\cdot 0{,}34 = 11{,}28\,кН$$

3.Брус разбиваем на 2 участка, где границами участков нагружения являются сечения бруса, в которых происходит скачкообразное изменение площади поперечного сечения, а также сечения, к которым приложены внешние силы.

Примем метод сечений. Рассечем брус на 2 участков нагружения. Рассмотрим мысленно верхнюю отсеченную часть бруса 1уч (рис 1.2а). Неизвестную продольную силу N будем всегда направлять вниз.

Определим продольную силу на участках:

1уч: $N_1 = -F_1 = -16\,кН$

2уч: $N_2 = -F_1 + F_2 - qx$

*При x = 0* $N_2^{1} = -16 + 30 = 14\,кН$

*При x = 2a* $N_2^{2} = -16 + 30 - 4 \cdot 2 \cdot 0{,}34 = 11{,}28\,кН$

Строим эпюру нормальных напряжений

4. Определиv в общем виде нормальное напряжение на каждом участке

$1\,уч.\ \sigma_1 = \dfrac{N_1}{A} = -\dfrac{F_1}{A} = -\dfrac{16}{A} =$

$2\,уч.\ \sigma_2^{1} = \dfrac{N_2^{1}}{3A} = \dfrac{-F_1 + F_2}{A} = \dfrac{14}{3A} =$

$2\,уч.\ \sigma_2^{2} = \dfrac{N_2^{2}}{3A} = \dfrac{-F_1 + F_2 - qx}{3A} = \dfrac{11{,}28}{3A}$

Строим эпюру нормальных напряжений. Наибольшее норальное напряжение на 1 участке

5. Для определения нормальных напряжений необходимо знать площадь сечений.

Условие прочности:

$$\left|\sigma_{max}\right| = \frac{\left|N_{max}\right|}{A} \le R$$

Определим площадь поперечного сечения

$$A \ge \frac{\left|N_{max}\right|}{R} = \frac{16 \cdot 10^3}{110 \cdot 10^6} = 145{,}45 \cdot 10^{-6}\,м^2 = 145{,}45\,мм^2$$

6.Определим численное нормальное напряжение

$$1\,уч.\ \ \sigma_1 = \frac{N_1}{A} = \frac{-16 \cdot 10^3}{145{,}45} = -110\,МПа$$

$$2\,уч.\ \ \sigma_2{}^1 = \frac{N_2{}^1}{A} = \frac{14 \cdot 10^3}{145{,}45} = 96{,}25\,МПа$$

$$3\,уч.\ \ \sigma_3 = \frac{N_3}{A} = \frac{11{,}28 \cdot 10^3}{145{,}45} = 77{,}75\,МПа$$

7.Проверим условие прочности на всех участках

$$\left|\sigma_1\right| = 110\,МПа \le 110\,МПа = R$$

$$\left|\sigma_2{}^1\right| = 96{,}25\,МПа \le 110\,МПа = R$$

$$\left|\sigma_2{}^2\right| = 77{,}25\,МПа \le 110\,МПа = R$$

На каждом участке условие прочности выполняется. При площади 145,55мм$^2$ превышение допускаемого напряжения не происходит,что свидетельствует о правильности выбранной площади.

Ответ: $R_A$= 11,28кН, $N_1$ = -16кН, $N_2$ = 14кН, $N_1$ = 11,28кН, $\sigma_1$ = -110Мпа, $\sigma_2$ = =96,5Мпа, $\sigma_3$ = 77,75Мпа, A = 145,45мм$^2$

**Задача № 3.** Для вала с круговым поперечным сечением (рис. 3)требуется:

– изобразить расчетную схему вала;

– построить эпюру крутящего момента Мк;

– из условия прочности определить диаметр d вала;

– построить эпюру максимальных касательных напряжений $\tau_{max}$;

– проверить выполнение условия прочности на участках вала и сделать вывод о правильности определения диаметра вала d;

– определить углы закручивания $\varphi_i$ на участках вала и полный угол закручивания вала $\varphi$.

– найти относительные углы закручивания $\theta_i$ на участках вала и проверить выполнение условия жесткости.

При расчете принять G = 8 · 104 МПа, [θ] = 1 град/м.

Исходные данные: $M_1$ = 0,9кН·м, $M_2$ = 1,1кН·м, $M_3$ = 0, $M_4$ = 1,4кН·м, a = 0,14м, b = 0,15м, c = 0,22м, $R_{ср}$ = 45МПа

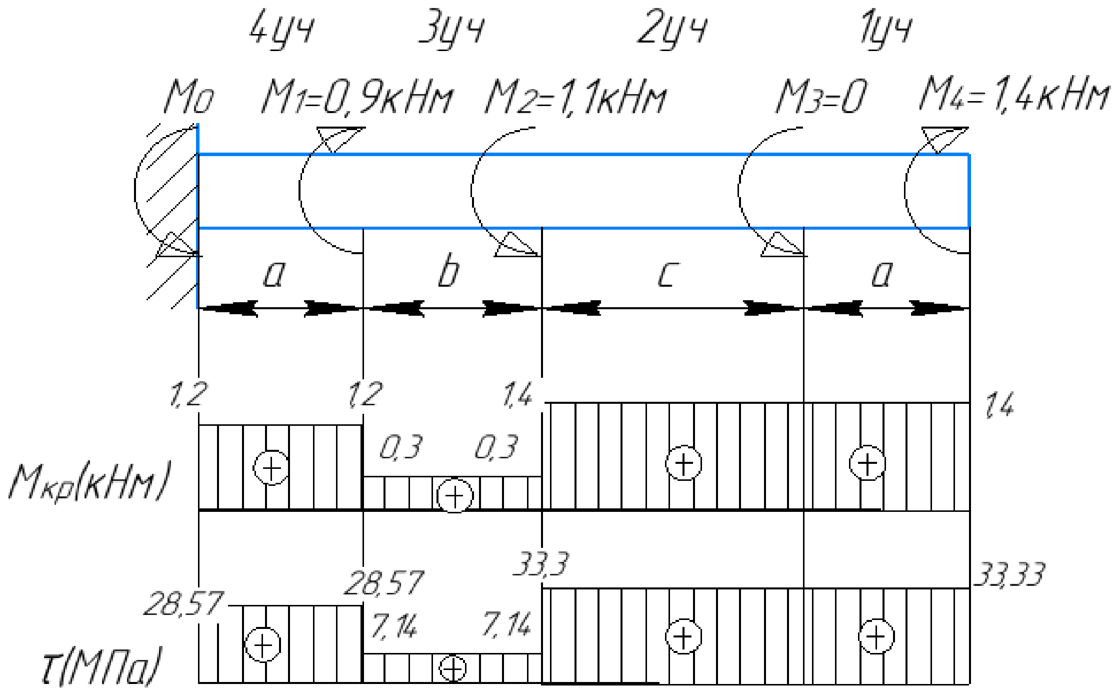



Рисунок 3

Решение.

1. Изобразим схему вала, на схеме указать численные значения заданных моментов.

2. Найдем неизвестный момент $M_0$ из уравнения равновесия внешних

моментов относительно оси x:

$$\sum M_z = 0: \qquad M_1 - M_2 - M_3 + M_4 - M_0 = 0$$

$$M_0 = \; M_1 - M_2 - M_3 + M_4 = 0{,}9 - 1{,}1 - 0 + 1{,}4 = 1{,}2\,кН \cdot м$$

3. Разобьём вал на участки, обозначить их номерами j = 1, 2, 3,4

4. Методом сечений определить крутящие моменты на участках вала: на каждом участке провести мысленно секущую плоскость и составим для отсеченной части вала уравнение равновесия моментов относительно продольной оси z, включая в каждое уравнение крутящий $M_{kj}$ на данном участке. На каждом участке рассматриваем часть вала со стороны свободного конца.

Участок 1 $M_K^I = M_4 = 1{,}4\,кН \cdot м$
Участок 2 $M_K^{II} = M_4 - M_3 = 1{,}4 - 0 = 1{,}4\,кН \cdot м$
Участок 3 $M_K^{III} = M_4 - M_3 - M_2 = 1{,}4 - 0 - 1{,}1 = 0{,}3\,кН \cdot м$
Участок 4 $M_K^{IV} = M_4 - M_3 - M_2 + M_1 = 1{,}4 - 0 - 1{,}1 + 0{,}9 = 1{,}2\,кН \cdot м$

По результатам вычислений строим эпюру $M_K$

5. Условие прочности по касательным напряжениям:

$$\tau = \frac{M_{кр}}{W_p} \le R_{cp}$$

6.Из условия прочности найти полярный момент сопротивления $W_\rho$ кругового поперечного сечения вала

$$W_p = \frac{|M_{кр\,max}|}{R_{cp}}, \quad где \quad W_p = \frac{\pi d^3}{16}$$

$M_{Kmax}$ - наибольший по величине крутящий момент (возникает на участках 1- 2) $M_{Kmax} = M_K^I = 1{,}4\,кН \cdot м = 1{,}4 \cdot 10^3\,Н \cdot м$.

После подстановки получим.

$$d \ge \sqrt[3]{\frac{16\,M_K^I}{\pi\,R_{cp}}} = \sqrt[3]{\frac{16 * 1{,}4 * 10^3}{3{,}14 * 45 * 10^6}} = 0{,}0541\,м = 54{,}1\,мм$$

Принимаем d = 60мм

7. Найдем значения наибольших касательных напряжений $\tau_{maxj}$ на участках вала для расчетного значения диаметра d

$$W_p = \frac{\pi d^3}{16} = \frac{3{,}14 \cdot 0{,}06^3}{16} = 42 \cdot 10^{-6}\,м^3$$

$$\tau_1=\frac{M_{кр1}}{W_p}=\frac{1{,}4\cdot10^3}{42\cdot10^{-6}}=33{,}33\,МПа\le R_{ср}=45\,МПа$$

$$\tau_2=\frac{M_{кр2}}{W_p}=\frac{1{,}4\cdot10^3}{42\cdot10^{-6}}=33{,}33\,МПа\le R_{ср}=45\,МПа$$

$$\tau_3=\frac{M_{кр3}}{W_p}=\frac{0{,}3\cdot10^3}{42\cdot10^{-6}}=7{,}14\,МПа\le R_{ср}=45\,МПа$$

$$\tau_4=\frac{M_{кр4}}{W_p}=\frac{1{,}2\cdot10^3}{42\cdot10^{-6}}=28{,}57\,МПа\le R_{ср}=45\,МПа$$

На участках напряжения соответствуют условию прочности при кручении:

По полученным результатам строим эпюру касательных напряжений.

Вычисляем крутильную жесткость вала $GI_P = G\frac{\pi d^4}{32}$

$$GI_P=8*10^4*10^6\frac{3{,}14*(0{,}06)^4}{32}=101{,}74*10^3\,Н\cdot м^2$$

8.Определим углы закручивания (углы поворота сечений) на каждом участке вала:

$\varphi_I = 1{,}4\times10^3\times0{,}14\,/\,101{,}74\times10^3 = 0{,}0019$ *рад;*

$\varphi_{II} = 1{,}4\times10^3\times0{,}22\,/\,101{,}74\times10^3 = 0{,}003$ *рад;*

$\varphi_{III} = 0{,}3\times10^3\times0{,}15\,/\,101{,}74\times10^3 = 0{,}0004$ *рад;*

$\varphi_{IV} = 1{,}2\times10^3\times0{,}14\,/\,101{,}74\times10^3 = 0{,}0017$ *рад.*

9. Найдем полный угол закручивания вала

$$\varphi=\sum\varphi_j=0{,}0019+0{,}003+0{,}0004+0{,}0017=0{,}007\,рад$$

10. Определим относительные углы закручивания на участках вала

Условие жесткости:

$$\theta_j\le[\theta]$$

$$\theta_1=\frac{\varphi_1}{a}=\frac{0{,}0019}{0{,}14}=0{,}014\,рад/м=0{,}78\,град/м\le1\,град/м=[\theta]$$

$$\theta_2=\frac{\varphi_2}{c}=\frac{0{,}003}{0{,}22}=0{,}014\,рад/м=0{,}78\,град/м\le1\,град/м=[\theta]$$

$$\theta_3=\frac{\varphi_3}{b}=\frac{0{,}0004}{0{,}15}=0{,}0027\,рад/м=0{,}15\,град/м\le1\,град/м=[\theta]$$

$$\theta_4=\frac{\varphi_4}{a}=\frac{0{,}0017}{0{,}14}=0{,}012\,рад/м=0{,}69\,град/м\le1\,град/м=[\theta]$$

Условие жесткости выполняется на всех участках

Ответ: принимаем d = 60мм удовлетворяющий всем условиям прочности.

**Задача № 4**. Для заданных двух схем балок – двухопорной консольной (рис. 4, а) и консоли (рис. 4, б), требуется:

– изобразить расчетную схему каждой балки;

– построить эпюры поперечной силы и изгибающего момента; – из условия прочности подобрать:

1) для схемы (а) стальную балку двутаврового поперечного сечения при расчетном сопротивлении R = 210 МПа;

2) для схемы (б) найти диаметр d кругового поперечного сечения деревянной балки при расчетном сопротивлении R = 10 Мпа

Исходные данные: *a = 1,5м, b = 1,2м, c = 1,5м, F = 16кН, M= 12кН, q =32кН/м*

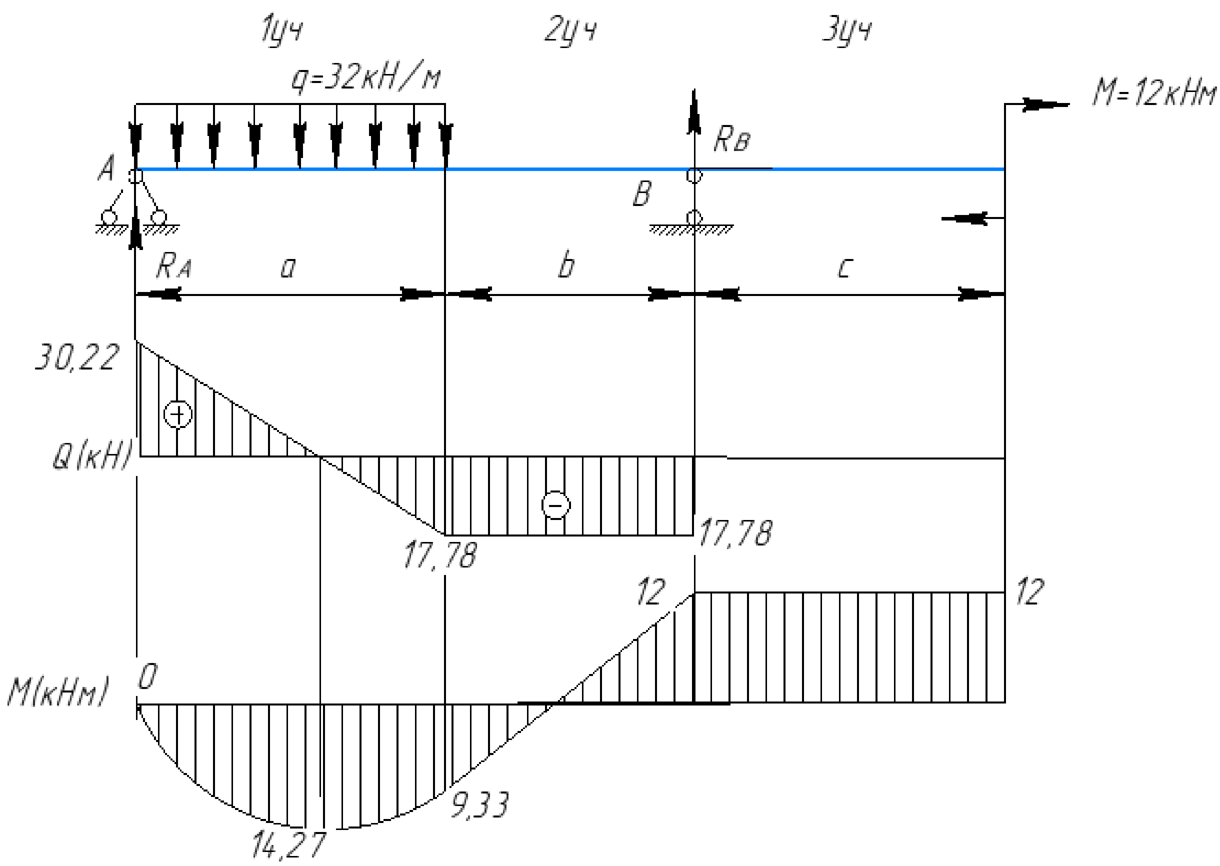



Рисунок 4 – Исходная схема, эпюра поперечной силы, эпюра изгибающих моментов (на растянутых волокнах)

Решение

Опорная реакция в шарнирно-неподвижной опоре А состоит из двух составляющих (горизонтальная $R_X$ и вертикальная $R_A$), при этом горизонтальная составляющая $R_X = 0$, так как а балку не действуют горизонтальные силы. Опорная реакция $R_B$ шарнирно-подвижной опоры В направлена перпендикулярна опорной поверхности.

Определим опорные реакции:

$$\sum M_A(F_k) = 0; \quad -q \cdot a \cdot \frac{a}{2} - M + R_B \cdot (a+b) = 0$$

$$R_B = \frac{q \cdot a \cdot \frac{a}{2} + M}{a+b} = \frac{32 \cdot 1{,}5 \cdot \frac{15}{2} + 12}{1{,}5 + 1{,}2} = 17{,}78\, кН$$

$$\sum M_B(F_k) = 0; \quad q \cdot a \cdot \left(\frac{a}{2} + b\right) - M - R_A \cdot (a+b) = 0$$

$$R_A = \frac{q \cdot a \cdot \left(\frac{a}{2} + b\right) - M}{a+b} = \frac{32 \cdot 1{,}5 \cdot \left(\frac{1{,}5}{2} + 1{,}2\right) - 12}{1{,}5 + 1{,}2} = 30{,}22\, кН$$

Выполним проверку:

$$\sum F_{ky} = 0; \quad R_A - q \cdot 1{,}5 + R_B = 30{,}22 - 32 \cdot 1{,}5 + 17{,}78 = 0$$

*Реакции найдены верно.*

Разделим балку на участки, где границами будут действующие силы.

Мысленно воспользуемся методом сечений:

<u>Участок №1</u> ($0 \le z_1 \le 1{,}5$м)

$Q_y = - qz_1 + R_A$

*при* $z_1 = 0$; $Q_y = 30{,}22$*кН.*

*при* $z_1 = 2$*м*; $Q_y = -32 \cdot 1{,}5 + 30{,}22 = - 17{,}78$ *кН·м.*

Смена знака означает, что на участке экстремум, найдем расстояние:

$- qz_1 + R_A = 0$

$z = R_A / q = 30{,}2/ 32 = 0{,}94$*м*

$M_x = R_A \cdot z_1 - qz_1 \cdot z_1/2;$

*при* $z_1 = 0$; $M_x = 0$*кН·м.*

*при* $z_1 = 1{,}5$*м*; $M_x = 30{,}22 \cdot 1{,}5 - 32 \cdot 1{,}5 \cdot 1{,}5/2 = 9{,}33$ *кН·м.*

Момент в точке экстремума:

*при* $z_1 = 0{,}94$*м*; $M_x = 30{,}22 \cdot 0{,}94 - 32 \cdot 0{,}94 \cdot 0{,}94/2 = 14{,}27$ *кН·м.*

Участок №2 ($0 \le z_2 \le 1{,}2$м)рассматриваем справа

$Q_y = -R_B = -17{,}78 кН.$

$M_x = -M + R_B \cdot z_2$ ;

при $z_2 = 0$; $M_x = -12$ кН·м.

при $z_2 = 1{,}2$м; $M_x = -12 + 17{,}78 \cdot 1{,}2 = 9{,}33$ кН·м.

Участок №3 ($0 \le z_3 \le 1{,}5$м) рассматриваем справа

$Q_y = 0$

$M_x = -M = -12$ кН·м.

По полученным данным строим эпюры: поперечной силы, эпюра изгибающих моментов (на растянутых волокнах)

*Определение размеров поперечного сечения балки*

Условие прочности:

$$\sigma_{max} = \frac{|M_{max}|}{W_z} \le R$$

Из эпюры М определяется максимальное значение изгибающего момента $M_{MAX} = 14{,}27$ кНм (рис. 4).

Рассчитывается требуемый момент сопротивления сечения из условия прочности по нормальным напряжениям:

$$W_z = \frac{M_{max}}{R} = \frac{14{,}27 \cdot 10^3}{210 \cdot 10^6} = 0{,}068 \cdot 10^{-3} м^3 = 68 см^3$$

По сортаменту ГОСТ 8239-89 выбираем наибольшее ближайшее значение, подходящий двутавр:

№14, где $W_z = 81{,}7$ $см^3$

Ответ: двутавр № 14.

Исходные данные: $a = 1{,}5м$, $b = 1{,}2м$, $c = 1{,}5м$, $F = 16кН$, $M= 12кН$, $q =32кН/м$

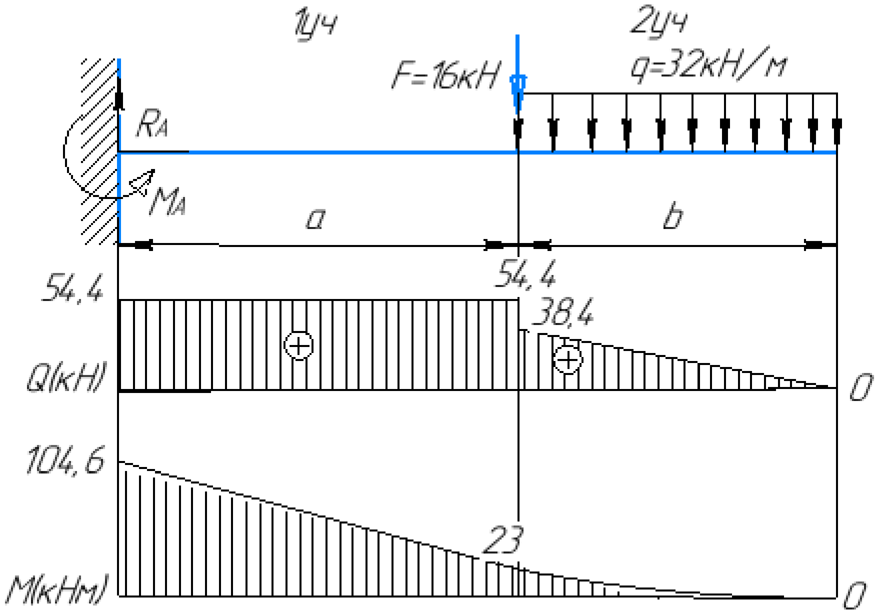



Рисунок 5

Решение

Опорная реакция в жесткой заделке состоит из двух составляющих (горизонтальная $R_x$ и вертикальная $R_A$) и момента $M_A$ (рисунок 5);

Поскольку нет внешних горизонтальных сил, то, $R_x = 0$

Составим уравнения равновесия

$$\sum F_y = 0; \quad -q \cdot b + R_A - F = 0$$

$$R_A = q \cdot b + F = 32 \cdot 1{,}2 + 16 = 54{,}4\,кН$$

$$\sum M_A(F_k) = 0; \quad M_A - q \cdot b \cdot \left(\frac{b}{2} + a\right) - F \cdot a = 0$$

$$M_A = q \cdot b \cdot \left(\frac{b}{2} + a\right) + F \cdot a = 32 \cdot 1{,}2 \cdot \left(\frac{1{,}2}{2} + 1{,}5\right) + 16 \cdot 1{,}5 = 104{,}6\,кН$$

На каждом участке методом сечений определим поперечную силу *Qy* и изгибающий момент *Mx*: проведем мысленно секущую плоскость на рассматриваемом участке и составить уравнения равновесия для отсеченной части балки (левой или правой), из этих уравнений найти искомые внутренние усилия.

<u>Участок №1</u> ($0 \le z_1 \le 1{,}5м$)

Участок №1 ($0 \le z_1 \le 1{,}5$м)слева

$Q_y = R_A = 54{,}4кН.$

$M_x = R_A \cdot z_1 - M;$

$при\ z_1 = 0;\ M_x = -104{,}6кН \cdot м.$

$при\ z_1 = 1{,}5м;\ M_x = 54{,}4 \cdot 1{,}5 – 104{,}6 = -23\ кН \cdot м.$

Участок №2 ($0 \le z_1 \le 1{,}2$м)справа

$Q_y = qz_1$ .

$при\ z_2 = 0;\ Q_y = 0.$

$при\ z_2 = 2м;\ Q_y = 32 \cdot 1{,}2 = 38{,}4\ кН$

$M_x = -\ qz_1 \cdot z_1/2;$

$при\ z_2 = 0;\ M_x = 0кН \cdot м.$

$при\ z_2 = 1{,}2м;\ M_x = -\ 32 \cdot 1{,}2 \cdot 1{,}2/2 = -23кН \cdot м.$

По полученным данным строим эпюры: поперечной силы, эпюра изгибающих моментов (на растянутых волокнах)

*Определение размеров поперечного сечения балки*

Условие прочности:

$$\sigma_{max} = \frac{|M_{max}|}{W_z} \le R$$

Из эпюры М определяется максимальное значение изгибающего момента $M_{MAX}$ = 104,6 кНм (рис. 5).

Для круглого поперечного сечения $W_z = \frac{\pi d^3}{32}$

$$d \ge \sqrt[3]{\frac{32 M_{max}}{\pi R}} = \sqrt[3]{\frac{32 * 104{,}6 * 10^3}{3{,}14 * 210 * 10^6}} = 0{,}172\, м$$

принимаем d = 18 см.

Ответ d = 18см

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПЛОСКИХ ПОПЕРЕЧНЫХ СЕЧЕНИЙ

**Задача № 1**. Для заданного симметричного поперечного сечения стержня (рис. 6) требуется:

– определить положение центра тяжести сечения; – построить главные центральные оси ($x_C$ – горизонтальная ось, $y_C$ – вертикальная ось);

– найти главные центральные моменты инерции *Jxc ,Jyc*

Исходные данные: a = 48мм, b = 50 мм, c = 65см

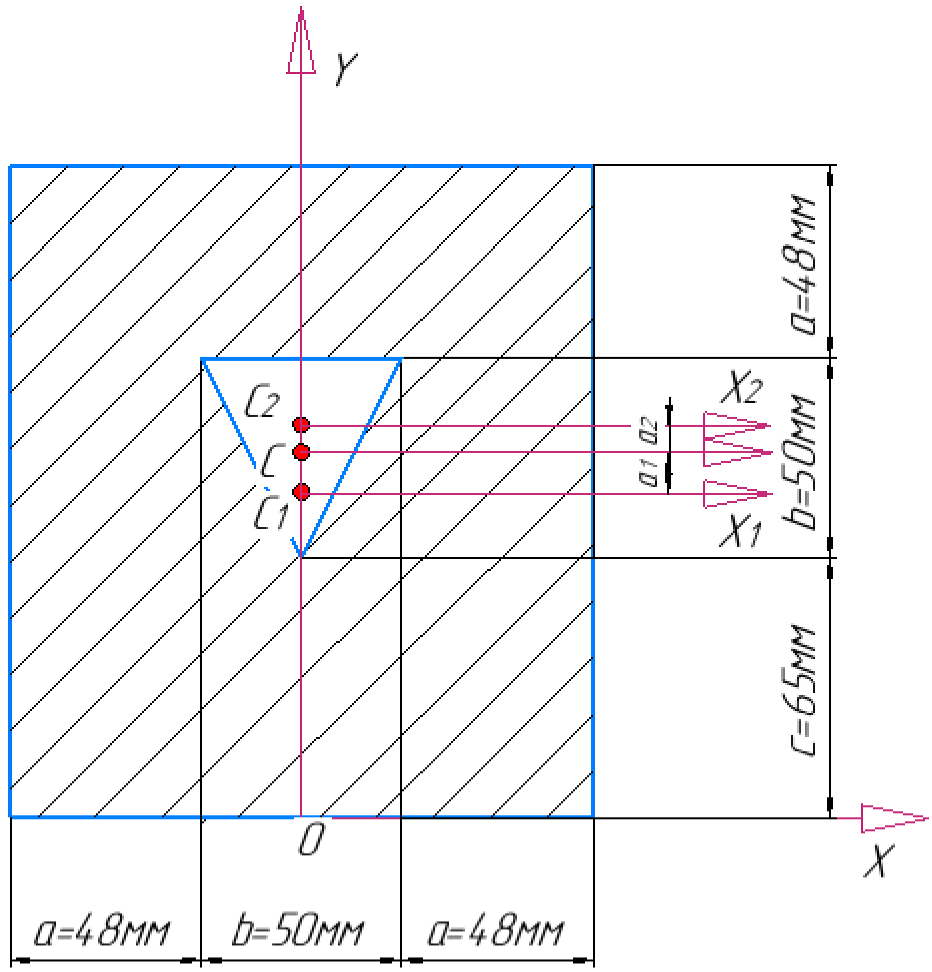



Рисунок 6

Решение

1. Начертим поперечное сечение по заданным размерам в масштабе. Проведем координатные оси, где начало координат точка О

2. Разобьем сечение на простые фигуры, для которых известны геометрические характеристики:

1 – прямоугольник со сторонами 146 х 163мм

координаты центра тяжести (0:81,5мм)

Определим площадь сечения:

$$A_1 = b * h = 146 * 163 = 23798\ мм^2$$

2- равнобедренный треугольник со сторонами b = 50мм h = 50мм

координаты центра тяжести (0:98,33мм)

Определим площадь сечения:

$$A_2 = \frac{1}{2} b h = \frac{1}{2} \cdot 50 \cdot 50 = 1250\ мм^2$$

3.Покажем центры тяжести простых фигур – точки Ci; проведем в каждой фигуре собственные центральные оси ($xCi$ – горизонтальные оси, $yCi$ – вертикальные оси.

4. Найти координаты центра тяжести заданной фигуры в системе осей Видим, что координата х центров тяжести двух фигур равна нулю, следовательно, координата х =0 и точка будет лежать на оси Y.

Найдем вторую координату:

$$Y_c = \frac{A_1 \cdot y_1 - A_2 \cdot y_2}{A_1 - A_2} = \frac{23798 \cdot 81{,}5 - 1250 \cdot 98{,}33}{23798 - 1250} = 91{,}47\ мм$$

5. Провести через найденный центр тяжести С всего сечения оси $x_C$ и $y_C$ – центральные оси заданного сечения.

6.Вычислить главные центральные моменты инерции симметричного сечения относительно главных центральных осей $x_C$ и $y_C$

$$I_x = \left(\frac{b h^3}{12} + A_1 a_1^2\right) - \left(\frac{b h^3}{36} + A_2 a_2^2\right) =$$

$$= \left(\frac{146 \cdot 163^3}{12} + 23798 \cdot \left(9{,}97^2\right) - \left(\frac{50 \cdot 50^3}{36} + 1250 \cdot \left(6{,}86^2\right) =\right.\right.$$

$$= 54828609{,}87\ мм^4 = 5482{,}86\ см^4$$

Где $a_1 = 91{,}47 - 81{,}5 = 9{,}97\ мм$

$a_2 = 98{,}33 - 91{,}47 = 6{,}86\ мм$

$$I_y = \left(\frac{h b^3}{12} + A_1 b_1^2\right) - \left(\frac{h \cdot b^3}{48} + A_2 b_2^2\right) = \left(\frac{163 \cdot 146^3}{12} + 0\right) - \left(\frac{50 \cdot 50^3}{48}\right) =$$

$$= 42142972{,}33\ мм^4 = 4214{,}3\ см^4$$

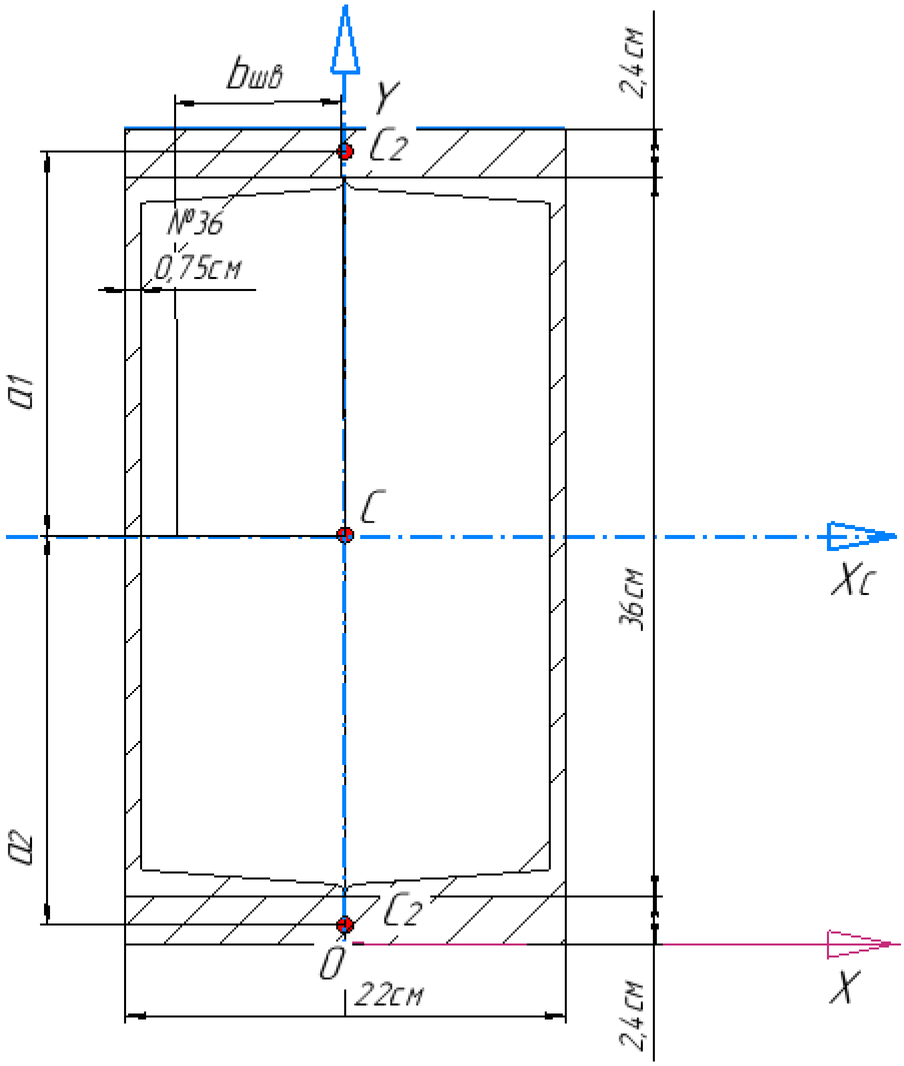
Ответ: координаты центра тяжести (0:91,47мм), $I_x$=5482,86 $см^4$, $I_y$ = 4214,3 $см^4$

**Задача № 2.** Для заданного плоского симметричного сечения, составленного из прокатных профилей (рис. 7), требуется:

– определить положение центра тяжести сечения;

– построить главные центральные оси (xC – горизонтальная ось, yC – вертикальная ось); – найти главные центральные моменты инерции *Ixc* ,*Iyc*

Исходные данные: толщина пластин а =24мм, l= 220мм, номер швеллеров №36




Решение

1. Начертим поперечное сечение по заданным размерам в масштабе. Проведем координатные оси, где начало координат точка О

2. Разобьем сечение на профили, для которых известны геометрические характеристики:

1 – пластина со сторонами 2,4см х 22см

координаты центра тяжести (0: 39,6см)

Определим площадь сечения:

$$A_1 = a * l = 2,4 * 22 = 52,8\, см^2$$

2- 2швеллера с параметрами h = 360мм, b = 110мм, s = 7,5мм,

t =12,6мм, $A_{шв}$ = 53,4см$^2$, $I_x = 10820\, см^4$, $I_y = 513\, см^4$, $z_0$=2,68см

координаты центра тяжести (0:20,4см)

Определим площадь сечения:

$$A_{шв} = 2 \cdot 53,4 = 106,8\, см\, 2$$

3 – пластина со сторонами 2,4см х 22см

координаты центра тяжести (0:1,2см)

Определим площадь сечения:

$$A_3 = a * l = 2,4 * 22 = 52,8\, см^2$$

3.Покажем центры тяжести простых фигур – точки Ci; проведем в каждой фигуре собственные центральные оси ($xCi$ – горизонтальные оси, $yCi$ – вертикальные оси.

4. Найти координаты центра тяжести заданной фигуры в системе осей Видим, что координата x центров тяжести двух фигур равна нулю, следовательно, координата x =0 и точка будет лежать на оси Y.

Найдем вторую координату:

$$Y_c = \frac{A_1 \cdot y_1 + A_{шв} \cdot y_2 + A_3 \cdot y_3}{A_1 + A_{шв} + A_3} = \frac{52,8 \cdot 39,6 + 106,8 \cdot 20,4 + 52,8 \cdot 1,2}{52,8 + 106,8 + 52,8} =$$

$$= 20,4\, мм$$

5. Провести через найденный центр тяжести C всего сечения оси $x_C$ и $y_C$ – центральные оси заданного сечения.

6.Вычислить главные центральные моменты инерции симметричного сечения относительно главных центральных осей $x_C$ и $y_C$

$$I_x = 2\left(I_{xшв} + \frac{b h^3}{12} + A_1 a_1^2\right) = 2\left(10820 + \frac{22 \cdot 2,4^3}{12} + 52,8 \cdot 19,2^2\right) =$$

$$= 60619,06\, см^4$$

Где $a_1 = 20,4 - 1,2 = 19,2\, см$

$$I_y = 2\left(I_{yшв} + A_{шв} b_2^{\;2} + \frac{h b^3}{12}\right) = 2\left(513 + 53{,}4 \cdot 8{,}32^2 + \frac{2{,}4 \cdot 22^3}{12}\right) =$$

$= 12678{,}14\, см^4$

Где $b_2 = \frac{22}{2} - 2{,}68 = 8{,}32\, см$

Ответ: координаты центра тяжести (0:20,4см), $I_x$=60619,06 $см^4$, $I_y = 12678{,}14\, см^4$