1. Исследовать ряд на сходимость.

$$\frac{1}{3^3}+\frac{2}{3^4}+\frac{3}{3^5}+\ldots+\frac{n}{3^{n+2}}+\ldots$$

Решение.

Применим признак Даламбера.

$$u_n=\frac{n}{3^{n+2}};\qquad u_{n+1}=\frac{n+1}{3^{n+3}}=\frac{n+1}{3\cdot 3^{n+2}}.$$

Вычислим предел:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n+1}{3\cdot 3^{n+2}}}{\frac{n}{3^{n+2}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{3n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{3}<1.$$

Предел конечен и меньше единицы, следовательно, ряд сходится.

2. Исследовать ряд на сходимость; если он сходится, то абсолютно или условно.

$$1-\frac{1}{7}+\frac{1}{17}-\frac{1}{31}+\ldots+(-1)^{n+1}\frac{1}{2n^2-1}+\ldots$$

Решение.

Общий член ряда имеет вид:

$$u_n=(-1)^{n+1}\frac{1}{2n^2-1},\qquad n=1,2,3,\ldots$$

Применим признак Лейбница.

$$\frac{1}{2n^2-1}>\frac{1}{2(n+1)^2-1}$$

Неравенство выполняется для любых $n\in N$.

Следовательно, первое условие признака Лейбница $|a_1|>|a_2|>|a_3|>\ldots$ выполнено.

$$\lim_{n\to\infty}|a_n|=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n^2-1}=\left|\frac{1}{\infty}\right|=0;$$

Т.е. второе условие признака Лейбница выполнено, следовательно, ряд сходится.

Исследуем на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n^2-1}$. Применим признак сравнения.

Сравним данный ряд с рядом $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$, который сходится как обобщенный гармонический: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}},(\alpha=2>1)$.

Используем предельный признак.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{2n^2-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2-1}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\left(2-\frac{1}{n^2}\right)=2\neq 0.$$

Следовательно, ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n^2-1}$ тоже сходится, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{2n^2-1}$ сходится абсолютно.

3. Найти область сходимости ряда.

$$2x+\frac{2^2\cdot x^2}{2^3}+\frac{2^3\cdot x^3}{3^3}+\ldots+\frac{2^n\cdot x^n}{n^3}+\ldots$$

Решение.

Общий член ряда имеет вид:

$$u_n=\frac{2^n\cdot x^n}{n^3},\qquad n=1,2,3,\ldots$$

Найдем радиус сходимости.

$$a_n=\frac{2^n}{n^3};\qquad a_{n+1}=\frac{2^{n+1}}{(n+1)^3}=\frac{2\cdot 2^n}{(n+1)^3}.$$

Вычислим предел.

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{2^n}{n^3}}{\dfrac{2\cdot 2^n}{(n+1)^3}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^3}{2n^3}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)^3=\frac{1}{2}.$$

Радиус сходимости: $R=\dfrac{1}{2}$.

Интервал сходимости ряда:

$|x|<\dfrac{1}{2}$ или $-\dfrac{1}{2}<x<\dfrac{1}{2}$.

Исследуем сходимость на концах интервала.

При $x=\dfrac{1}{2}$ получим числовой ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^n}{n^3}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}.$$

Полученный ряд сходится как обобщенный гармонический: $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^{\alpha}},(\alpha=2>1)$.

Следовательно, граница $x=\dfrac{1}{2}$ входит в область сходимости.

При $x=-\dfrac{1}{2}$ получим знакочередующийся ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n\cdot\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n}{n^3}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^3}.$$

Полученный ряд сходится абсолютно, т.к. сходится соответствующий знакопостоянный ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^3}$.

Следовательно, граница $x = -\frac{1}{2}$ включается в область сходимости.

Область сходимости имеет вид $-\frac{1}{2} \le x \le \frac{1}{2}$.